ИЗВЕСТИЯ ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 208 1974

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ПОРОГОВЫХ СТРУКТУР

Д. В. АНИСИМОВ, В. М. РАЗИН

(Представлена научным семинаром кафедры вычислительной техники)

Пороговый элемент представляет собой устройство, состоящее из суммирующего звена с несколькими входами и одним выходом на дискриминатор, в качестве которого чаще всего используется элемент с релейной характеристикой. Выход порогового элемента принимает значение «ноль», если взвешенная сумма входов меньше нуля, и значение «единица» в противном случае и равенстве взвешенной суммы нулю, т. е.

$$sgn\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = \begin{cases} a, \text{ если } \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i < 0 \\ 1, \text{ если } \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i \geqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

где x_i — i-ый вход $x_i \in \{0, 1\}$;
a_i — кратность (вес) i-го элемента;
$n+1$ — общее число входов, включая пороговый вход.

Для весового коэффициента порога при $x_{n+1}=1$ существует обозначение T, называемое порогом. В этом случае

$$y = sgn\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - T\right]. \tag{2}$$

Как видно из (2), функция y принимает два значения 0 или 1 в соответствии с условием (1).

В связи с этим функцию sgn можно отождествить с булевой функцией от n двоичных переменных, также имеющей значение 0 или 1, и тогда есть смысл говорить о представлении переключательной функции с помощью порогового элемента. Однако не любая булева функция может быть реализована с помощью одного порогового элемента, в то время как любой пороговый элемент реализует ту или иную функцию. Логическая функция, реализуемая одним пороговым элементом (ОПЭ), называется пороговой, а функции, реализуемые двумя, тремя и т. д. пороговыми элементами (ПЭ), носят название соответственно двух- и трехпороговых.

Таким образом, любая булева функция реализуется сетью из ПЭ, что впрочем вытекает из того, что ПЭ реализует все функции, входящие в функционально полный набор, а именно:

нелинейные переключательные функции

$$(y = x_1 x_2 \dots x_n, \quad y = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n);$$

переключательную функцию, не сохраняющую нуль $[y = \overline{x}]$;
переключательную функцию, не сохраняющую единицу $[y = \overline{x}]$;
немонотонную переключательную функцию $[y = \overline{x}]$;
несамодвойственные переключательные функции

$$(y = x_1 x_2 \dots x_n, \quad y = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n).$$

Проблема представления булевой функции сетью, состоящей из ПЭ, как известно, есть проблема синтеза, а проблема анализа включает в себя задачу определения функции, реализуемой конкретной сетью из известных ПЭ.

Анализ порогового элемента с помощью производящих функций

Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ имеет реализацию $T\ (a_1, a_2, \dots a_n)$ и требуется определить вид функции, т. е. решить задачу анализа ОПЭ. Назовем $[a_1, a_2, \dots a_n; T]$ весовым вектором ОПЭ, которому соответствует функция $(x_1, x_2 \dots, x_n)$. Это соответствие символически будем записывать следующим образом [1]

$$[x_1, x_2, \dots x_n] \rightarrow [a_1, a_2, \dots a_n; T]. \tag{3}$$

Как было указано выше, по заданному весовому вектору можно полностью определить вид функции, что упрощенно выполняется путем сравнения сумм весовых коэффициентов с пороговым значением, например, для весового вектора:

$$[1, 1, 2, 3, 5; 5] \rightarrow x_1 x_2 x_4 \vee x_3 x_4 \vee x_5$$
$$(a_5 = T; \ a_3 + a_4 = T; \ a_1 + a_2 + a_4 = T).$$

Более строгий анализ может быть проведен с помощью производящих функций, заимствованных из комбинаторного анализа [2].

Однако прежде чем вводить производящие функции, необходимо ознакомиться с симметрическими булевыми функциями и свойствами пороговых функций.

Симметрические булевые функции [3]

Симметрической булевой функцией называется функция n-переменных $x(x_1, x_2, \dots x_n)$, если она инвариантна относительно всех перестановок n-переменных или их отрицаний. Так функция $x_1 x_2 \vee \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ симметрична по переменным x_1, x_2, x_3, ибо любая перестановка этих переменных не меняет вида функции. Таким образом, функция симметрическая, если и только если выполняется условие

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_2, x_1, \dots x_n) = \dots = f(x_n, x_1, \dots x_{n-1}). \tag{4}$$

Симметрическая функция задается множеством целых чисел $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_x)\ (X \leqslant n)$, называемым множеством рабочих чисел, таких, что функция обращается в единицу тогда и только тогда, когда число переменных, имеющих значение „1“, выражается рабочими числами, стоящими в обозначении симметрической функции. Если обозначить симметрическую булеву функцию переменных x с рабочими числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_x\ [\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_x]$ символом $S\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_x(x)$, то $S_{1,3,5}(x_1, x_2, \dots x_5) = 1$ при одном, трех и пяти аргументах, равных единице.

По аналогии с симметрическим элементарным многочленом [3] назовем симметрические булевы функции, имеющие в качестве рабочих чисел ряд $\kappa, \kappa+1, \ldots, n-1, n\,(0 \leqslant K \leqslant n)$, элементарными. Для таких функций введено специальное обозначение, роднящее их с алгебраическими функциями тоже симметрическими, построенными из суммы всех возможных сочетаний из n элементов по κ

$$S_{\kappa}, \kappa+1, \ldots n-1, n\,(x_1, x_2, \ldots x_n) = S_n^{\kappa}. \tag{5}$$

Весьма важно отметить, что в минимальной дизъюнктивной нормальной форме (МДНФ) такой функции не содержится отрицаний, а конъюнктивные члены образуются сочетанием из n элементов по κ. Например,

$$S_{2,3,4}(\kappa_1, \kappa_2, x_3, x_4) = S_4^2 = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4.$$

Логические операции над булевыми симметрическими функциями весьма просты [5], так:

дизъюнкция симметрических функций от одних и тех же переменных дает симметрическую функцию тех же переменных с объединением множества рабочих чисел;

конъюнкции — с пересечением множества рабочих чисел;

отрицание — с дополнением множества рабочих чисел.

В силу инвариантности симметрической функции относительно переменных вытекает то обстоятельство, что весовые коэффициенты у всех переменных одинаковы и равны для минимального значения единице, причем элементарная симметрическая функция и ее дополнение суть пороговые функции, что, впрочем, является следствием ее свойств монотонности и определенности весовых коэффициентов переменных. Это обстоятельство позволяет рассматривать любую пороговую функцию, как элементарную симметрическую, а весовой коэффициент в этом случае будет показывать, сколько раз встречается тот или иной аргумент. Пусть в качестве примера, имеем функцию $x_1 x_2 \vee x_1 x_3$ с весовым вектором [2, 1, 1; 3]. Эту функцию можно представить как

$$S_4^3(x_1, x_1, x_2, x_3) = x_1x_1x_2 \vee x_1x_1x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2 \vee x_1x_3.$$

Все симметрические функции также в силу инвариантности имеют весовые коэффициенты по входным переменным, равные единице, однако, в силу нарушения непрерывности рабочих чисел усложняется структура сети, так как необходимо производить запрет по отсутствующим рабочим числам.

Свойства пороговых функций

Перейдем к рассмотрению свойств пороговых функций, которые весьма просто можно проверить и доказать.

Если $f(x_1, x_2, \ldots x_n) \to (a_1, a_2, \ldots, a_n; T)$, то
свойство 1:

$$f(x_1, x_2, \ldots, \bar{x}_i, \ldots x_n) \to (a_1, a_2, \ldots -a_i, \ldots a_n;\ T-a_i); \tag{6}$$

свойство 2:

$$\bar{f}(x_1, x_2, \ldots x_n) \to (-a_1, -a_2, \ldots -a_n;\ -T+1); \tag{7}$$

свойство 3:

$$\bar{f}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n] \to \left[a_1, a_2, \ldots, a_n;\ -T+1+\sum_{i=1}^{n} a_i\right]; \tag{8}$$

свойство 4:

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n \to$$
$$\to [a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n; T]; \quad (9а)$$

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \ldots, x_n] \to$$
$$\to [a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n; T - a_j]; \quad (9б)$$

свойство 5:

если

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (a_1, a_2, \ldots, a_n; T_1), \text{ а}$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (a_1, a_2, \ldots, a_n; T_2) \text{ и}$$
$$T_2 > T_1, \text{ то } f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \supseteq f_2(x_1, x_2, \ldots x_n); \quad (10)$$

свойство 6:

если $f[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — пороговая функция, то

$$f(0 \to x_i,\ 1 \to x_j) \leqslant f(1 \to x_i,\ 0 \to x_j) \text{ при } a_i \geqslant a_j, \quad (11а)$$
$$f(0 \to x_i,\ 1 \to x_j) \geqslant f(1 \to x_i,\ 0 \to x_j) \text{ при } a_i \leqslant a_j. \quad (11б)$$

Здесь $f(0 \to A)$ и $f(1 \to A)$ функции, полученные из $f(x)$ путем придания переменным, входящим в подмножество $A \subseteq x$, значения 0 и 1 соответственно;

свойство 7:

пусть x_i — переменная, вес которой максимален в реализации $f(x)$, **тогда**

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(1 \to x_i)\, x_i \vee f(0 \to x_i);$$

свойство 8:

$$f(1 \to x_i) \geqslant f(0 \to x_i), \quad (12)$$

если

$$f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to [a_1, a_2, \ldots, a_m; T),$$

то

$$f_n = x_{m+1} \vee x_{m+2} \vee \ldots \vee x_n \vee f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to$$
$$\to [T, T, T' \ldots, T, a_1, a_2, \ldots, a_m; T]; \quad (13)$$

свойство 9:

если

$$f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to (a_1, a_2, \ldots, a_m; T),$$

то

$$f_n \approx x_{m+1} x_{m+2} \ldots x_n f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to$$
$$\to [a_n, a_n, \ldots, a_n, a_1, a_2, \ldots, a_m; (n - m) a_n + T], \quad (14)$$

где

$$a_n = \sum_{i=1}^{m} a_i - T + 1.$$

Анализ пороговых элементов с помощью производящих функций

Приведенные выше свойства симметрических булевых функций и свойства пороговых функций могут быть использованы при построении производящих функций. Для примера рассмотрим произведение

$$(1 \vee x_1 t)(1 \vee x_2 t)(1 \vee x_3 t).$$

Перемножив и расположив это произведение по степеням t, получим $1 \vee [x_1 \vee x_2 \vee x_3]\, t \vee [x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3]\, t^2 \vee x_1 x_2 x_3 t^3$. Как можно легко заметить, в скобках получены симметрические булевы функции, имеющие одинаковые веса переменных x_1, x_2, x_3 и разные пороги.

При этом „1“ имеет порог, равный 0, функция $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ порог, равный 1, функция $x_1x_2 \vee x_1x_2 \vee x_3x_3$ порог, равный 2 и наконец функция $x_1x_2x_3$ порог, равный 3, в реализации их пороговым элементом, т. е. их пороги равны показателю степени при t. Как видно из приведенного примера, при одних и тех же весовых коэффициентах, но при разных порогах в разложении получилось четыре функции, которые носят название изобарических пороговых функций. Вообще семейство пороговых функций называется изобарическим (5), если оно может быть реализовано одним пороговым элементом, у которого весовые коэффициенты n-входов постоянны, а величина порога принимает столько различных значений, сколько функций содержится в семействе, и численно определяется рядом натуральных чисел $0 \div \sum_{i=1}^{n} a_i$. Из этого определения видно, насколько важно представление пораоговых функций производящими функциями, ибо в этом случае, знчя весовые коэффициенты, можно определить все множество изобари, еских функций. Функции, полученные в разложении произведенияебсходны с элементарными симметрическими функциями обычной алгаврры; в том и в другом случае число слагаемых каждой скобки рп но числу сочетаний из трех элементов по n $(n = 0, 1, 2, 3)$

При повторении аргументов производящую функцию можно по. лучить заменой прежних множителей $(1 \vee x_x t)$ множителями вида.

$$1 \vee x_\kappa t \vee x_\kappa t^2 \vee \ldots \vee x_\kappa t^{a_\kappa} \; (\kappa = 1, 2 \ldots). \tag{15}$$

В общем случае, зная ряд весовых коэффициентов $a_1, a_2, \ldots a_n \; (a_x > 0)$' можно записать производящую функцию в таком виде:

$$(1 \vee x_1 t \vee \ldots \vee \overbrace{x_1 t^{a_1}) \ldots (1}^{n\text{-сомножителей}} \vee x_n t \vee \ldots \vee x_n t^{a_n}). \tag{16}$$

В качестве примера возьмем функцию $(x_1x_2 \vee x_1x_3) \to [2, 1, 1; 3]$, длд которой в соответствии с (15) производящая функция будет иметь вия

$$(1 \vee x_1 t \vee x_1 t^2)(1 \vee x_2 t)(1 \vee x_3 t) =$$
$$= 1 \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3) t \vee (x_1 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3) t^2 \vee$$
$$\vee (x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2x_3) t^3 \vee x_1x_2x_3t^4 =$$
$$= 1 \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3) t \vee (x_1 \vee x_2x_3) t^2 \vee (x_1x_2 \vee x_3x_1) t^3 \vee x_1x_2x_3x_4t^4.$$

Как видно, при $t^3 (T = 3)$ действительно появляется булевая функция в искомой форме.

Введем производящие функции для $\alpha_i < 0$, используя вышеприведенные свойства. Как видно из (6), появление отрицательного весового коэффициента уменьшает порог на величину, равную a_i. Это обстоятельство может быть отражено следующим образом: производящая функция будет иметь вид

$$t^{-c_1} \vee \bar{x}_i t^{-a_i+1} \vee \ldots \vee \bar{x}_i t^{-1} \vee \bar{x}_i, \tag{17}$$

$$(1 \vee xt \vee \ldots x_1 t^{c_1}) \ldots (t^{-a_i} \vee x_i t^{-a_i+1} \vee \ldots \vee x_i)(1 \vee x_n t \vee \ldots \vee x_n t^{a_n}). \tag{18}$$

Используя свойство 2 (7), получим для отрицания функции производящую функцию вида

$$(t^{-a_1} \vee \bar{x}, t^{-c_1+1} \vee \ldots \vee \bar{x}_1) \ldots (t^{-a_n} \vee \bar{x}_n t^{-a_n+1} \vee \ldots \vee \bar{x}_n). \tag{19}$$

Пример: Для реализации [—2, —1, —1; —2] имеем

$$(t^{-2} \vee \bar{x}, t^{-1} \vee \bar{x}_1)(t^{-1} \vee \bar{x}_2)(t^{-1} \vee \bar{x}_3) = t^{-4} \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) t^{-3}$$
$$\vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3) t^{-2} \vee (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3) t^{-1} \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 t^0.$$

Для самодвойственной функции (8) имеем производящую функцию в соответствии с положительными коэффициентами по формуле (15). Как видно из примера, самодвойственная функция встречается при $t^2 : x_1 \vee x_2 x_3$ (сравните с $x_1\ x_2 \vee x_1 x_3$).

Производящие функции по свойствам $4 \div 7$ не отличаются по форме от (15). Что касается свойств (8) и (9), то в этих случаях необходимо добавлять члены производящей функции в соответствии с реализацией (13), (14). Таким образом, можно сделать вывод, что при $a_i > 0$ булева функция будет содержать x_i без отрицания, и при $a_i < 0$ функция будет содержать x_i с отрицанием.

Весьма просто производится анализ пороговых симметрических функций. В этом случае по величине порога сразу строится ряд изобарических функций, представляющих из себя элементарные симметрические функции. Например:

$$[1, 1, 1, 1, 1; 2] \to f[x_1, \ldots, x_5].$$

Ряд изобарических функций S_5^0, S_5^1, S_5^3, S_5^4, S_5^5, где вверху указан порог.

Разложение многопороговой функции на элементарные пороговые функции

Введем понятие сети из ПЭ. Из различных источников известно несколько вариантов сетей из ПЭ, но наиболее оптимальная сеть с точки зрения минимального количества элементов представлена на рис. 1. Здесь выходной ПЭ объединяет, как входы $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, так и функциональные входы $J[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{m-1}(x)]$ со своими весовыми коэффициентами.

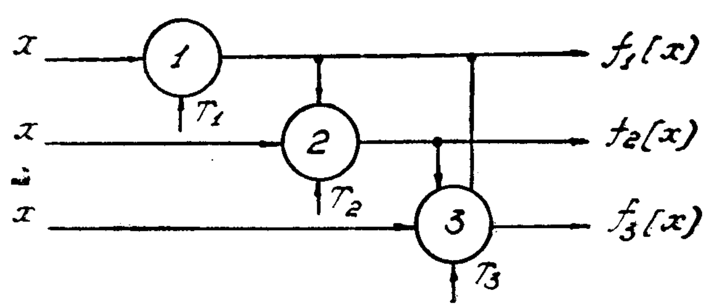

Рис. 1.

В частном случае ряд коэффициентов может быть равен нулю; в этом случае часть связей может быть удалена. Структуру сети, изображенной на рис. 1, назовем максимальной связанной, а ПЭ, стоящий на выходе, назовем ПЭ с функциональными порогами. В этом случае задача синтеза заключается в нахождении весовых коэффициентов для входных сигналов и для функций

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{m-1}(x).$$

Как видно, в этом случае номер функции определяет одно, двух- или $m-1$-пороговые функции. Структура такой сети описывается системой

$$f_1 = sgn\left[\sum_{i=1}^{n} a_{i_1} x_{i_1} - T_1\right],$$

$$f_2 = sgn\left[\sum_{i=1}^{n} a_{i_2} x_{i_2} + a_{(n+1)_2} f_1 - T_2\right],$$

. . . .

$$f_m = sgn\left[\sum_{i=1}^{n} a_{i_m} x_{i_m} \vee \sum_{j=1}^{m} f_j(x)\, a_{(n+j)_m} - T_m\right]. \tag{20}$$

Для дальнейшего изложения введем обозначение [5] $f_1, f_2, \dots f_m$ — выходные функции пороговых элементов $1, 2, \dots, m$ соответственно, которые являются пороговыми функциями, как от входных переменных, так и от функциональных входных сигналов.

$f_{2/1}$ — пороговая функция, реализуемая элементом при условии, что входная функция, поступающая с выхода элемента, равна нулю;

$f_{2/1}$ — то же, при условии $f_1 = 1$;

$f_{3/12}$ — пороговая функция, реализуемая элементом при условии $f_1 = f_2 = 0$;

$f_{3/12}$ — то же, при условии $f_1 = 1$, $f_2 = 0$;

$f_{3/12}$ — то же, при условии $f_1 = 0$, $f_2 = 1$;

$f_{3/12}$ — то же, при условии $f_1 = 1$, $f_2 = 1$.

Известно, что всякая булева функция допускает разложение

$$\begin{aligned} f_n &= f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = \\ &= x_j f(x_1, x_2, \dots - x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n) \vee \\ &\vee \bar{x}_j f(x_1, x_2, \dots x_{j-1}, 0, x_{i+1}, \dots x_n) = x_j f_1 \vee \bar{x}_j f_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Если f_n — пороговая функция, то

$$f_n = x_j = f_1 \vee f_2, \tag{21а}$$

либо

$$f_n = \bar{x}_j = f \vee f_1 \tag{21б}$$

в случае положительных, либо отрицательных весовых коэффициентов соответственно. Как видно из (21), функции f_1 и f_2 не зависят от x_i.

Пороговую функцию для сети, как мы уже показали, необходимо представлять как функцию, зависящую не только от аргументов, но и от предыдущих функциональных выходов, которые в свою очередь зависят от других функций и т. д. Так, например, сеть, состоящая из трех пороговых элементов, имеет на выходе три функции.

Последняя функция является выходной. Функция f_1 является однопороговой функцией и зависит только от аргументов $\{x\}$; функция f_2 — двухпороговая и зависит как от аргументов, так и от функции f_1; функция f_3 — трехпороговая и уже зависит от аргументов и функций f_1 и f_2. В общем случае для трехпороговой системы уравнение выходной функции будет

$$f_3 = f\{x_1 f_1(x)_1 f_2[x_1 f_1(x)]\}.$$

Для получения общей формулы разложения всякая выходная функция пороговой сети представляется как однопороговая функция в вышеперечисленных аргументах. Разложение начинается

$$\begin{aligned} f_2 &= f[x_1 f_1(x)] = f_1(x) f(x, 1) \vee \bar{f}_1(x) f(x, 0) = \\ &= f_1(x) f_{2/1} \vee \bar{f}_1(x) f_{2/\bar{1}} = f_1 f_{2/1} \vee \bar{f}_1 f_{2/\bar{1}} \end{aligned}$$

и ведется до тех пор, пока функция $f_{m/1\ldots}$ не будет содержать внутри ни одного функционального аргумента для $m = 3$

$$
\begin{aligned}
f_3 = {} & f_1(x) f_2[x_1 f_1(x)] f_3(x, 1, 1) \vee \\
& \vee \bar{f}_1(x) f_2[x, f_1(x)] f_3(x, 0, 1) \vee \\
& \vee \bar{f}_1(x) \bar{f}_2[x, f, (x)] f_3(x, 1, 0) \vee \\
& \vee \bar{f}_1(x) \bar{f}_2[x, f_1(x)] f_3(x, 1, 1) = \\
= {} & f_1 f_{2/1} f_{3/12} \vee \bar{f}_1 f_{2/\bar{1}} f_{3/\bar{1}2} \vee f_1 \bar{f}_{2/1} f_{3/1\bar{2}} \vee \bar{f}_1 \bar{f}_{2/\bar{1}} f_{3/\bar{1}\bar{2}}.
\end{aligned}
$$

Проводя аналогичные разложения, получаем общую формулу для $m = m$

$$
\begin{aligned}
f_m = {} & f_1 f_{2/1} \ldots f_{m-1/12\ldots m-2} f_{m/12} \ldots m-1 \vee \\
& \vee \bar{f}_1 f_{2/\bar{1}} \ldots f_{m-1/12\ldots m-2} f_{m/\bar{1}2} \ldots m-1 \vee \\
& \vee f_1 f_{2/1} \ldots \bar{f}_{m-1/12\ldots \overline{m-2}} f_{m/1\bar{2}} \ldots m-1 \vee \\
& \vee \bar{f}_1 f_{2/\bar{1}} \ldots \bar{f}_{m-1/12\ldots \overline{m-2}} f_{m/\bar{1}\bar{2}} \ldots m-1.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Формула (22) может быть упрощена при условии, что все коэффициенты функциональных порогов либо положительны, либо отрицательны. Для положительных весов функциональных входов

$$
\begin{array}{c}
f_{m/12\ldots m-1} \supset \dfrac{f_{m/\mathbf{12}\ldots\overline{m-1}}}{f_{m/\bar{1}2\ldots m-1}} \supset \ldots \supset \dfrac{f_{m/\mathbf{\bar{1}\bar{2}}\ldots\overline{m-1}}}{f_{m/\bar{1}\bar{2}\ldots m-1}} \supset f_{m/\bar{1}\bar{2}\ldots\overline{m-1}} \\
\hline
f_{\mathbf{2}/1} \supset f_{2/\bar{1}}
\end{array}
$$

и

$$
\begin{aligned}
f_m = {} & f_1 f_{2/1} \ldots f_{m-1/12\ldots m-2} f_{m/12\ldots m-1} \vee \\
& \vee f_{2/\bar{1}} \ldots f_{m-\bar{1}/1\bar{2}\ldots m-12} f_{m/12\ldots m-1} \vee \\
& \vee f_{\mathbf{1}} f_{m/1\bar{\mathbf{2}}\ldots\overline{m-1}} \vee f_{m/1\bar{2}\ldots\overline{m-1}}.
\end{aligned} \tag{22a}
$$

Аналогичные рассуждения приводят к разложению в конъюнктивной форме

$$
\begin{aligned}
f_m = {} & (f_1 \vee f_{2/\bar{1}} \vee \ldots \vee f_{m-1/\bar{1}\bar{\mathbf{2}}\ldots\overline{m-2}} \vee f_{m/\bar{1}\bar{2}\ldots\overline{m-1}}) \wedge \\
& \wedge (\bar{f}_1 \vee f_{2/1} \vee \ldots \vee f_{m-1/1\mathbf{2}\ldots\overline{m-\mathbf{2}}} \vee f_{m/1\bar{2}\ldots\overline{m-\mathbf{1}}}) \wedge \\
& \wedge (f_1 \vee \bar{f}_{2/\bar{1}} \vee \ldots \vee f_{m-1/\bar{1}2\ldots m-2} \vee f_{m/\bar{1}2\ldots\overline{m-1}}) \wedge \\
& \wedge (\bar{f}_1 \vee \bar{f}_{2/1} \vee \ldots \vee \bar{f}_{m-1/12\ldots m-2} \vee f_{m/12\ldots m-1}).
\end{aligned} \tag{23}
$$

Дальнейшее упрощение можно получить, если устранить связи, распространенные не на соседние элементы, например $a_{13} = 0$, но $a_{23} \neq 0$ и т. д. В этом случае для $m = 3$ $f_3 = (f_1 f_{2/1} \vee f_{2/\bar{1}}) f_{3/2} \vee f_{3/\bar{2}} = f_2 f_{3/2} \vee f_{3/\bar{2}}$, т. е. задача сводится к поиску как бы двухпороговой функции, а цепь поисков прекращается при получении функции с младшим индексом, имеющим пороговую реализацию

$$
\begin{aligned}
f_m &= f_{m-1} f_{m/m-1} \vee f_{m/\overline{m-1}} \\
f_{m-1} &= f_{m-2} f_{m-1/m-2} \vee f_{m-1/\overline{m-2}} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_2 &= f_1 f_{2/1} \vee f_{2/\bar{1}}.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Для дальнейшего изложения синтеза логических схем на пороговых элементах необходимо ввести основные правила выполнения операции над ними [5], с помощью которых возможно представление булевых функций пороговыми элементами: дизъюнкция m-булевых пороговых функций может быть реализована не более, чем m-пороговыми логическими элементами, причем $a_{(m-1)m} = T_m$ (где $a_{(m-1m)m}$весовой коэффициент для функционального входа от соседнего порогового элемента).

Конъюнкции m-булевых пороговых функций может быть реализована не более чем m-1пороговыми элементами с

$$a_{(m-1)\,m} > \sum_{i=1}^{n} a_{i_m} \text{ и } T'_m = T_m + a_{(m-1)\,m}.$$

В соответствии с (24) и вышеизложенными правилами синтез пороговых сетей необходимо проводить по несколько упрощенной по сравнению с [5] схеме.

1. Булеву функцию f_m представить в минимальной дизъюнктивной форме (не обязательно тупиковой).

2. Выбрать в качестве функции $f_{m/\overline{m-1}}$ одну из дизъюнкций, покрывающих возможно минимальное количество конституент, которая всегда будет пороговой.

3. Из оставшихся простых импликант выделить пороговую функцию $f_{m/m-1}$ и изобарическую функцию $f_{m/\overline{m-1}}$, для чего оставшуюся функцию представить в конъюнктивной форме. На этом этапе выделяется также функция f_{m-1}.

4. Разложение функции f_{m-1} ведется аналогично. Цепь поисков продолжается до получения произведения двух пороговых функций $f_{2/1} f_1$.

5. Определяются весовые коэффициенты в реализации функций $f_{m/m-1}$, $f_{m-1/m-2}$, ..., $f_{2/1}$, f_1 и затем в реализации функций $f_{m/\overline{m-1}}$, $f_{m-1/\overline{m-2}}$, ..., $f_{2/\overline{1}}$. Определяются веса функциональных входов как

$$a_{(m-1)\,m} = T_{m/\overline{m-1}} - T_{m/m-1}.$$

Пример.

$$f_m = x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee$$
$$\vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \vee$$
$$\vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee$$
$$\vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5;$$

1. $f_m(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee$
$$\vee x_1 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_4 x_5;$$

2. $f_{m/\overline{m-1}}(\bar{x}, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5;$

3. $f_{m/m-1} f_{m-1} = (x_1 \vee x_3)(x_1 \vee {}_4)(x_1 \vee x_5)(x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge$
$$\wedge (\bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$$
$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_5);$$
$$f_{m/m-1}(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$$
$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_5);$$
$$f_{m-1}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)(x_1 \vee x_5) \wedge$$
$$\wedge (x_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) =$$
$$= x_1 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_3 \vee x_5;$$

4. $f_{m-1/\overline{m-2}}(x_1, \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_5) = x_1 \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_5)$

$$f_{m-1\,m-2} f_{m-2} f_{m-2} = (x_1 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)(x_1 \vee x_5)(x_3 \vee x_5) \wedge$$
$$\wedge (x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_4 \vee x_5)(\bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5);$$
$$f_{m-1/m-2}(x_1, \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_5) = (\bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)\, x_1 \vee x_4) =$$
$$= (x_4 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_5);$$
$$f_{m-2}(x_1, x_3; \bar{x}_4, x_5) = (x_1 \vee x_3)(x_1 \vee x_5)(x_3 \vee x_5)(x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge$$
$$\wedge (\bar{x}_4 \wedge x_5) = x_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_4 x_5 \vee x_3 x_5.$$

5. $f_{m/m-1} = f_{3/2}(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5) \to [2, 2, 1, 1, 1; 2];$
$$f_{m/\overline{m-1}} = f_{3/\bar{2}}(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5) \to [2, 2, 1, 1, 1; 7];$$
$$T_{3/2} = 2;\ T_{3/\bar{2}} = 7;\ a_{23} = T_{3/\bar{2}} - T_{3/2} = 7 - 2 = 5;$$
$$f_{m-1/m-2} = f_{2/1}(x_1, \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_5) \to [1, 1, 2, 1; 2];$$
$$f_{m-1/\overline{m-2}} = f_{2/\bar{1}}(x_1, \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_5) \to [1, 1, 2, 1; 5]$$
$$T_{2/1} = 2;\ T_{2/\bar{1}} = 5;\ a_{12} = 3;$$
$$f_{m-2} = f_1(x_1, x_3, \bar{x}_4, x_5) \to [1, 2, 1, 2; 4] \quad T_1 = 4$$

На рис. 2 показана реализация заданной функции.

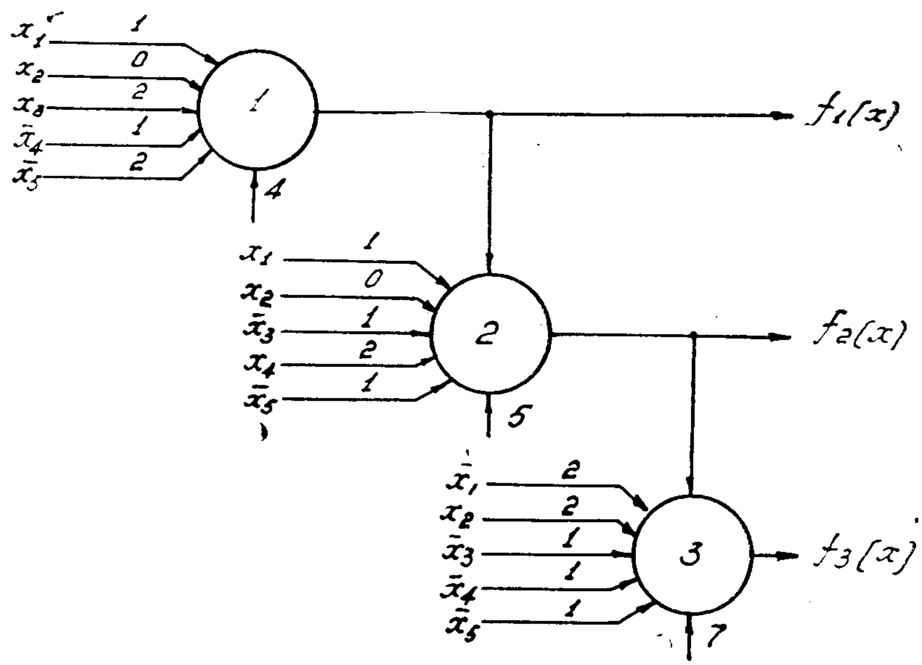

Рис. 2.

В заключение необходимо отметить, что реализация булевых функций пороговыми сетями по описанному способу синтеза также позволяет значительно сократить количество необходимых элементов в сравнении с реализацией в булевом базисе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Бутаков. К систематике пороговых функций. Семинар «Вопросы теории математических электронных цифровых машин». Киев, 1965.
2. Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. М., Изд-во ИЛ, 1963.
3. Г. Н. Поваров. О групповой инвариантности булевых функций. Сб. «Применение логики в науке и технике». Изд-во АН СССР, стр. 263—340, 1959.
4. А. К. Курош. Курс высшей алгебры. Физматгиз, 1963.
5. К. Шеннон. Символический анализ релейных и переключательных схем. Сб.: «Работы по теории информации и кибернетике». М., Изд-во ИЛ, 1963.