

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПЕЧИ СОПРОТИВЛЕНИЯ

В. Н. ЧУДИНОВ

(Представлена научным семинаром кафедры автоматики и телемеханики)

Одной из основных задач, возникающих при создании систем автоматического регулирования, является задача математического описания динамики процессов, протекающих в автоматизируемом объекте. Наиболее точные сведения о динамических свойствах объекта дает система дифференциальных уравнений. Уравнения в частных производных, описывающие объекты с распределенными параметрами, часто можно свести к трансцендентным передаточным функциям путем выбора соответствующих граничных условий [1].

При анализе и синтезе систем автоматического регулирования подобными объектами представляет интерес не столько решение сложного дифференциального уравнения, сколько получение передаточной функции в дробно-рациональном виде. Отсюда возникает задача аппроксимации трансцендентных передаточных функций соответствующим образом.

В настоящей работе сделана попытка аналитического определения передаточной функции печи сопротивления путем решения общего уравнения теплопроводности с помощью преобразований Лапласа при граничных условиях третьего рода.

Указанный подход может быть рекомендован для тех случаев, когда справедливы сделанные ниже допущения.

В результате аппроксимации с помощью интерполяционных дробей Паде получено упрощенное выражение для передаточной функции.

Задача решается применительно к печам сопротивления косвенного нагрева, имеющим прямоугольное сечение; в стенках печи располагаются нагреватели (рис. 1). Подводимая к печи энергия обеспечивает нагрев поступающего в рабочее пространство воздуха, стенок печи и изделия; часть тепла уходит в окружающую атмосферу от нагретых наружных стенок.

Изделие в общем случае нагревается за счет конвективного теплоперехода от нагретого воздуха и лучистой энергии разогретых внутренних стенок печи.

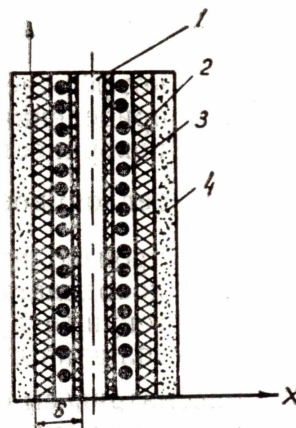


Рис. 1. Схема печи.  
1 — рабочее пространство печи; 2 — нагреватели; 3 — стенка печи; 4 — теплоизоляционный кожух

Рассмотрим стенку печи, у которой длина значительно больше ширины. Сделаем следующие допущения. Нагреватели равномерно распределены по объему стенки, которую с наружной стороны считаем изолированной (потери тепла в окружающую атмосферу обычно легко учесть), температурный градиент стенки печи зависит только от одной координаты — толщины стенки, изделие принято теплотехнически «тонким». Считаем также, что газовая среда внутри печи прозрачна для лучистого потока энергии.

Введем следующие обозначения:

- $Q$  — мощность печи,  $\text{ккал/ч}$ ;  
 $T_v$  — температура воздуха внутри печи,  $^{\circ}\text{К}$ ;  
 $T_o$  — температура окружающей среды (наружная температура),  $^{\circ}\text{К}$ ;  
 $T_c$  — температура стенки печи,  $^{\circ}\text{К}$ ;  
 $T_n$  — температура изделия,  $^{\circ}\text{К}$ ;  
 $a$  — коэффициент температуропроводности,  $\text{м}$ ;  
 $\alpha_c$  — коэффициент теплоотдачи от внутренних стенок печи к воздуху, проходящему внутри печи,  $\frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град}}$ ;  
 $\alpha_n$  — коэффициент теплоотдачи от нагретого воздуха к изделию,  $\frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град}}$ ;  
 $\lambda$  — коэффициент теплопроводности стенок печи,  $\frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{град}}$ ;  
 $C_o$  — коэффициент лучеиспускания абсолютно черного тела,  $\frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot ^{\circ}\text{К}^4}$ ;  
 $\varphi$  — коэффициент облученности;  
 $\varepsilon_n$  — приведенный коэффициент черноты;  
 $F_c, F_n$  — поверхность соответственно стенки и изделия,  $\text{м}^2$ ;  
 $C_n, C_v$  — теплоемкость материала изделия и воздуха,  $\frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$ ;  
 $G_o$  — производительность печи;  
 $x$  — координата по толщине стенки;  
 $\tau$  — текущее время;  
 $\delta$  — толщина стенки,  $\text{м}$ .

Рассматриваем стенку печи как неограниченную пластину с внутренними источниками тепла, изолированную с одной стороны. Так как рассматривается одномерная задача, то уравнение теплопроводности для стенки имеет вид [2]

$$\frac{\partial T_c(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T_c(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{Q_o}{c \cdot \gamma}; \quad (1)$$

$$T_c(x, 0) = T_o; \quad \frac{\partial T_c(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (\tau > 0; 0 < x < \delta).$$

Запишем граничные условия для установившегося состояния, имея в виду, что количество тепла, подводимого теплопроводностью, расходуется на нагрев воздуха в камере печи. Кроме того, изделие, находящееся в печи, нагревается за счет конвективного теплоперехода от нагретого воздуха и лучистой энергии разогретых внутренних стенок печи. Таким образом, имеют место следующие уравнения:

$$-\lambda F_c \frac{\partial T_c(x, \tau)}{\partial x} = \alpha_c F_c [T_c(x, \tau) - T_v(\tau)] + \alpha_n F_n [T_v(\tau) - T_n(\tau)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \varphi \varepsilon_n C_o F_n \left\{ \left[ \frac{T_c(x, \tau)}{100} \right]^4 - \left[ \frac{T_n(\tau)}{100} \right]^4 \right\}, \\
C_n G_o [T_n(\tau) - T_o] &= \alpha_n F_n [T_b(\tau) - T_n(\tau)] + \varphi \varepsilon_n C_o F_n \left\{ \left[ \frac{T_c(x, \tau)}{100} \right]^4 - \right. \\
& \quad \left. - \left[ \frac{T_n(\tau)}{100} \right]^4 \right\}, \\
C_b m_b [T_b(\tau) - T_o] &= \alpha_c F_c [T_c(x, \tau) - T_b(\tau)] - \alpha_n F_n [T_b(\tau) - T_n(\tau)].
\end{aligned}$$

Если мощность, подводимую к печи, увеличить, то температура тел, находящихся в печи, начнет возрастать, т. е. при  $Q = Q_o^* + \Delta Q$  имеют место уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
T_c(x, \tau) &= T_{co} + \Delta T_c(x, \Delta), \\
T_n(\tau) &= T_{но} + \Delta T_n(\tau), \\
T_b(\tau) &= T_{во} + \Delta T_b(\tau),
\end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$T_{co}$ ,  $T_{но}$ ,  $T_{во}$  — величины температур, соответствующие установившемуся состоянию.

Подставляя (2) в уравнение (1) и в выражения для граничных условий, отбрасывая члены, содержащие приращения в степени выше первой, и вычитая из полученных уравнений уравнения статики, получим для стенки

$$\frac{\partial \Delta T_c(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \Delta T_c(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\Delta Q}{c\gamma}.$$

Обозначив  $\frac{\Delta T_c(x, \tau)}{T_{co}} = \Theta_c(x, \tau)$ , получим

$$\frac{\partial \Theta_c(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \Theta_c(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\Delta Q}{T_{co} \cdot c \cdot \gamma}.$$

После преобразования по Лапласу последнего уравнения, получим

$$\bar{\Theta}_c''(x, p) - \frac{p}{a} \bar{\Theta}_c(x, p) + \frac{T_o}{a} + \frac{\Delta Q}{p T_{co} c \gamma a} = 0,$$

где  $\Theta_c(x, \tau) \doteq \bar{\Theta}_c(x, p)$ , а штрихами обозначена производная по координате.

Решение для изображения может быть записано [2] в виде

$$\bar{\Theta}_c(x, p) - \frac{T_o}{p} = \frac{\Delta Q}{p^2 T_{co} \cdot c \gamma} + A \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot x. \quad (3)$$

Граничное условие ( $x = \delta$ ).

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \Delta T_c(x, \tau)}{\partial x} &= \frac{\Delta T_c(x, \tau)}{T_{co}} \left[ \frac{\alpha_c F_c}{\lambda F_c} + \frac{4 T_{co}^3 \cdot \varphi \cdot \varepsilon_n C_o F_n}{100^4 \lambda F_c} \right] + \\
& + \frac{\Delta T_b(\tau)}{T_{во}} \left[ \frac{\alpha_n F_n T_{во}}{T_{co} \lambda F_c} - \frac{T_{во} \cdot \alpha_c}{T_{co} \lambda} \right] - \\
& - \frac{\Delta T_n(\tau)}{T_{но}} \left[ \frac{\alpha_n \cdot F_n \cdot T_{но}}{T_{co} \lambda F_c} + \frac{4 T_{но}^4 \varphi \varepsilon_n C_o F_n}{\lambda F_c T_{co} \cdot 100^4} \right]. \quad (4)
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T_{\text{в}}(\tau)}{T_{\text{во}}} &= \Theta_{\text{в}}(\tau), \quad \frac{\Delta T_{\text{п}}(\tau)}{T_{\text{но}}} = \Theta_{\text{п}}(\tau); \\ \beta &= \frac{100^4 \alpha_{\text{с}} F_{\text{с}} + 4T_{\text{со}}^3 \varphi \varepsilon_{\text{п}} C_{\text{о}} F_{\text{п}}}{100^4 \lambda F_{\text{с}}}; \\ \beta_1 &= \frac{T_{\text{во}}}{T_{\text{со}}} \cdot \frac{\alpha_{\text{п}} F_{\text{п}} - \alpha_{\text{с}} F_{\text{с}}}{\lambda F_{\text{с}}}; \\ \beta_2 &= \frac{T_{\text{но}}}{T_{\text{со}}} \cdot \frac{100^4 \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}} + 4T_{\text{но}}^3 \varphi \varepsilon_{\text{п}} C_{\text{о}} F_{\text{п}}}{100^4 \lambda F_{\text{с}}}.\end{aligned}$$

С учетом новых обозначений уравнение (4) после преобразования по Лапласу принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\Theta}_{\text{с}}(x, p)}{\partial x} + \beta \bar{\Theta}_{\text{с}}(x, p) + \beta_1 \bar{\Theta}_{\text{в}}(p) + \beta_2 \bar{\Theta}_{\text{п}}(p) = 0. \quad (5)$$

Уравнение нагрева изделия:

$$\begin{aligned}\Delta T_{\text{п}}(\tau) \cdot \left( C_{\text{п}} G_{\text{о}} + \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}} + \frac{4 \cdot \varphi \varepsilon_{\text{п}} C_{\text{о}} F_{\text{п}} T_{\text{но}}^3}{100^4} \right) - \\ - \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}} \Delta T_{\text{в}}(\tau) - \frac{\Delta T_{\text{с}}(x, \tau)}{T_{\text{со}}} \cdot \frac{4 \varphi \varepsilon_{\text{п}} C_{\text{о}} F_{\text{п}} T_{\text{со}}^4}{100^4} = 0.\end{aligned} \quad (6)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\beta' &= \frac{4 \varphi \varepsilon_{\text{п}} C_{\text{о}} F_{\text{п}} T_{\text{со}}^3}{100^4}, \quad \beta'_1 = \frac{T_{\text{во}}}{T_{\text{со}}} \cdot \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}}, \\ \beta'_2 &= \frac{T_{\text{но}}}{100^4 T_{\text{со}}} (C_{\text{п}} G_{\text{о}} + 100^4 \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}} + 4 \varphi \varepsilon_{\text{п}} C_{\text{о}} F_{\text{п}} T_{\text{но}}^3).\end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений после преобразования уравнения (6) по Лапласу получим

$$\beta' \bar{\Theta}_{\text{с}}(x, p) + \beta'_1 \bar{\Theta}_{\text{в}}(p) - \beta'_2 \bar{\Theta}_{\text{п}}(p) = 0 \quad (7)$$

Уравнение нагрева воздуха:

$$\alpha_{\text{с}} F_{\text{с}} \Delta T_{\text{с}}(x, \tau) - \Delta T_{\text{в}}(\tau) (C_{\text{в}} m_{\text{в}} + \alpha_{\text{с}} F_{\text{с}} + \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}}) + \Delta T_{\text{п}}(\tau) \cdot \alpha_{\text{п}} \cdot F_{\text{п}} = 0.$$

С учетом обозначений:

$$\begin{aligned}\beta''_1 &= \frac{T_{\text{во}}}{T_{\text{со}}} \cdot \frac{C_{\text{в}} m_{\text{в}} + \alpha_{\text{с}} F_{\text{с}} + \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}}}{\alpha_{\text{с}} F_{\text{с}}}, \\ \beta''_2 &= \frac{T_{\text{но}}}{T_{\text{со}}} \cdot \frac{\alpha_{\text{п}} F_{\text{п}}}{\alpha_{\text{с}} F_{\text{с}}},\end{aligned}$$

применяя преобразование Лапласа, перепишем уравнение (8)

$$\bar{\Theta}_{\text{с}}(x, p) - \beta''_1 \bar{\Theta}_{\text{в}}(p) + \beta''_2 \bar{\Theta}_{\text{п}}(p) = 0. \quad (9)$$

Решая совместно (3), (5), (7), (9), относительно интересующих переменных, получим

$$\bar{\Theta}_{\text{в}}(p) \left( \beta^* \beta + \beta^* \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta - \beta^* \frac{\beta_2 \beta'}{\beta_2'} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta_1 \beta'_2 - \beta_2 - \beta'_1}{\beta'_2} \Big) - \frac{T_0}{p} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta - \\
& - \frac{\Delta Q}{p^2 T_{co} c \gamma} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta = 0, \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$\beta^* = \frac{\beta'_1 \beta'_2 - \beta'_2 \beta'_1}{\beta'_2 + \beta'_2 \beta'_1}.$$

Передаточная функция  $W(p)$  является оператором динамической связи между входной (мощностью, подводимой к печи) и выходной (температурой воздуха в камере печи) величинами. Согласно (10), запишем:

$$\begin{aligned}
W(p) &= \frac{A \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta}{p \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta + B \sqrt{p}} = \\
&= \frac{A \left( \exp 2 \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta - 1 \right)}{p \left( \exp 2 \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta - 1 \right) + B \sqrt{p} \left( \exp 2 \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta + 1 \right)}, \quad (11)
\end{aligned}$$

где

$$A = \frac{\Delta Q}{T_{co} c \gamma \beta^*}, \quad B = \frac{\sqrt{a} \beta \beta'_2 \beta^* - \beta_2 \beta' \beta^* + \beta_1 \beta'_2 - \beta_2 \beta'_1}{\beta^* \beta'_2}.$$

Передаточная функция (11) печи представляет собой трансцендентное выражение. Дальнейшие операции с таким выражением достаточно затруднительны. Поэтому необходимо заменить точное выражение (11) аппроксимирующей передаточной функцией в виде многочленов от оператора  $p$ .

В [3] описан метод определения аппроксимирующей передаточной функции по известным коэффициентам разложенной в бесконечный ряд исходной передаточной функции. Однако указанный метод не всегда приводит к удовлетворительному результату.

Другой метод приближения основан на применении дробей Паде [4] для монотонных ограниченных процессов. В работе [4] использовано понятие инерционности  $S$  переходного монотонного процесса, введенное для определения коэффициентов передаточных функций и являющейся обобщением понятия постоянной времени процесса. Выражение для  $S_n$  имеет [4] вид:

$$S_n = (-1)^n \frac{1}{n!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^n W(p)}{dp^n}.$$

Приближение передаточной функции печи дробями Паде, выраженное через инерционности соответствующих порядков, имеет вид

$$W(p) = \frac{S_0}{1 + \frac{S_1}{S_0} p + \left[ \left( \frac{S_1}{S_0} \right)^2 - \frac{S_2}{S_0} \right] p^2}, \quad (12)$$

где

$$S_0 = \frac{A \cdot \delta}{B a}, \quad S_1 = \frac{A \delta^2 (4 + B \delta)}{4 B^2 a^2}, \quad S_2 = \frac{A^2 \delta^2 (16 + B \delta)}{96 B^4 a^4}.$$

С помощью указанного метода достигается приближенное выражение сложной трансцендентной функции дробнорациональной, что соответствует аппроксимации кривой переходного процесса интегральной кривой некоторого однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

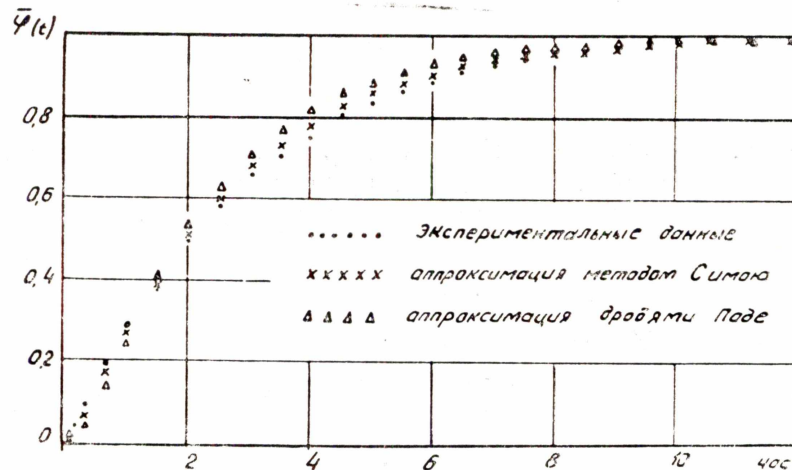


Рис. 2.

Основным результатом применения метода [4] к задаче аналитической аппроксимации трансцендентной передаточной функции является то, что коэффициенты упрощенной передаточной функции удалось выразить через конструктивные параметры печи. Теоретические результаты, приведенные в работе, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Для подтверждения теоретического результата была определена передаточная функция эмали печи типа М-24. Выражение для переходной функции, найденное из экспериментально снятой кривой разгона методом Симою [3] дает следующую зависимость:

$$\bar{\varphi}[t] = 1 - 1,05 e^{-\frac{t}{2,49}} + 0,06 e^{-\frac{t}{0,133}}$$

Результат аппроксимации аналитического выражения (11) при помощи интерполяционных дробей Паде показывает, что

$$\bar{\varphi}(t) = 1 - 1,47 e^{-\frac{t}{1,76}} + 0,466 e^{-\frac{t}{0,56}}$$

Сравнение результатов теоретического анализа с экспериментальными данными приведено на рис. 2.

Следует отметить, что описанная методика позволяет успешно рассчитывать динамические характеристики печей с хорошей теплоизоляцией, либо если потери тепла в окружающую среду могут быть легко учтены.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Фельдман, Г. К. Рубин, З. Л. Трейзон. Исследование тепловой инерционности электропечей сопротивления. Труды ВНИИЭТО, вып. 1, 1965.
2. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952.
3. М. П. Симою. Определение коэффициентов передаточных функций линейризованных звеньев и систем авторегулирования. «Автоматика и телемеханика», 18, № 6, 1957.
4. Б. Н. Девятков. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. СО АН СССР, Новосибирск, 1964.