

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПЕЧИ СОПРОТИВЛЕНИЯ

В. Н. ЧУДИНОВ

(Представлена научным семинаром кафедры автоматики и телемеханики)

Одной из основных задач, возникающих при создании систем автоматического регулирования, является задача математического описания динамики процессов, протекающих в автоматизируемом объекте. Наиболее точные сведения о динамических свойствах объекта дает система дифференциальных уравнений. Уравнения в частных производных, описывающие объекты с распределенными параметрами, часто можно свести к трансцендентным передаточным функциям путем выбора соответствующих граничных условий [1].

При анализе и синтезе систем автоматического регулирования подобными объектами представляет интерес не столько решение сложного дифференциального уравнения, сколько получение передаточной функции в дробно-рациональном виде. Отсюда возникает задача аппроксимации трансцендентных передаточных функций соответствующим образом.

В настоящей работе сделана попытка аналитического определения передаточной функции печи сопротивления путем решения общего уравнения теплопроводности с помощью преобразований Лапласа при граничных условиях третьего рода.

Указанный подход может быть рекомендован для тех случаев, когда справедливы сделанные ниже допущения.

В результате аппроксимации с помощью интерполяционных дробей Паде получено упрощенное выражение для передаточной функции.

Задача решается применительно к печам сопротивления косвенного нагрева, имеющим прямоугольное сечение; в стенках печи располагаются нагреватели (рис. 1). Подводимая к печи энергия обеспечивает нагрев поступающего в рабочее пространство воздуха, стенок печи и изделия; часть тепла уходит в окружающую атмосферу от нагретых наружных стенок.

Изделие в общем случае нагревается за счет конвективного теплоперехода от нагретого воздуха и лучистой энергии разогретых внутренних стенок печи.

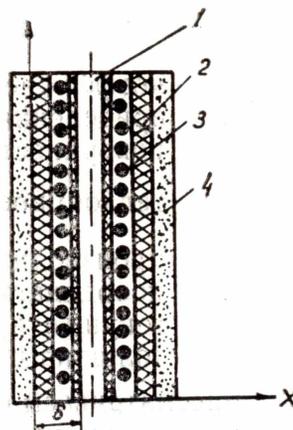


Рис. 1. Схема печи.
1 — рабочее пространство печи; 2 — нагреватели; 3 — стенка печи; 4 — теплоизоляционный кожух

Рассмотрим стенку печи, у которой длина значительно больше ширины. Сделаем следующие допущения. Нагреватели равномерно распределены по объему стенки, которую с наружной стороны считаем изолированной (потери тепла в окружающую атмосферу обычно легко учесть), температурный градиент стенки печи зависит только от одной координаты — толщины стенки, изделие принято теплотехнически «тонким». Считаем также, что газовая среда внутри печи прозрачна для лучистого потока энергии.

Введем следующие обозначения:

- Q — мощность печи, ккал/ч ;
 T_v — температура воздуха внутри печи, $^{\circ}\text{К}$;
 T_o — температура окружающей среды (наружная температура), $^{\circ}\text{К}$;
 T_c — температура стенки печи, $^{\circ}\text{К}$;
 T_n — температура изделия, $^{\circ}\text{К}$;
 a — коэффициент температуропроводности, м ;
 α_c — коэффициент теплоотдачи от внутренних стенок печи к воздуху, проходящему внутри печи, $\frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град}}$;
 α_n — коэффициент теплоотдачи от нагретого воздуха к изделию, $\frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град}}$;
 λ — коэффициент теплопроводности стенок печи, $\frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{град}}$;
 C_0 — коэффициент лучеиспускания абсолютно черного тела, $\frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot ^{\circ}\text{К}^4}$;
 φ — коэффициент облученности;
 ε_n — приведенный коэффициент черноты;
 F_c, F_n — поверхность соответственно стенки и изделия, м^2 ;
 C_n, C_v — теплоемкость материала изделия и воздуха, $\frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$;
 G_0 — производительность печи;
 x — координата по толщине стенки;
 τ — текущее время;
 δ — толщина стенки, м .

Рассматриваем стенку печи как неограниченную пластину с внутренними источниками тепла, изолированную с одной стороны. Так как рассматривается одномерная задача, то уравнение теплопроводности для стенки имеет вид [2]

$$\frac{\partial T_c(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T_c(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{Q_0}{c \cdot \gamma}; \quad (1)$$

$$T_c(x, 0) = T_o; \quad \frac{\partial T_c(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (\tau > 0; 0 < x < \delta).$$

Запишем граничные условия для установившегося состояния, имея в виду, что количество тепла, подводимого теплопроводностью, расходуется на нагрев воздуха в камере печи. Кроме того, изделие, находящееся в печи, нагревается за счет конвективного теплоперехода от нагретого воздуха и лучистой энергии разогретых внутренних стенок печи. Таким образом, имеют место следующие уравнения:

$$-\lambda F_c \frac{\partial T_c(x, \tau)}{\partial x} = \alpha_c F_c [T_c(x, \tau) - T_v(\tau)] + \alpha_n F_n [T_v(\tau) - T_n(\tau)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \varphi \varepsilon_n C_o F_n \left\{ \left[\frac{T_c(x, \tau)}{100} \right]^4 - \left[\frac{T_n(\tau)}{100} \right]^4 \right\}, \\
C_n G_o [T_n(\tau) - T_o] &= \alpha_n F_n [T_b(\tau) - T_n(\tau)] + \varphi \varepsilon_n C_o F_n \left\{ \left[\frac{T_c(x, \tau)}{100} \right]^4 - \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{T_n(\tau)}{100} \right]^4 \right\}, \\
C_b m_b [T_b(\tau) - T_o] &= \alpha_c F_c [T_c(x, \tau) - T_b(\tau)] - \alpha_n F_n [T_b(\tau) - T_n(\tau)].
\end{aligned}$$

Если мощность, подводимую к печи, увеличить, то температура тел, находящихся в печи, начнет возрастать, т. е. при $Q = Q_o^* + \Delta Q$ имеют место уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
T_c(x, \tau) &= T_{co} + \Delta T_c(x, \tau), \\
T_n(\tau) &= T_{но} + \Delta T_n(\tau), \\
T_b(\tau) &= T_{во} + \Delta T_b(\tau),
\end{aligned} \right\} \quad (2)$$

T_{co} , $T_{но}$, $T_{во}$ — величины температур, соответствующие установившемуся состоянию.

Подставляя (2) в уравнение (1) и в выражения для граничных условий, отбрасывая члены, содержащие приращения в степени выше первой, и вычитая из полученных уравнений уравнения статики, получим для стенки

$$\frac{\partial \Delta T_c(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \Delta T_c(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\Delta Q}{c\gamma}.$$

Обозначив $\frac{\Delta T_c(x, \tau)}{T_{co}} = \Theta_c(x, \tau)$, получим

$$\frac{\partial \Theta_c(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \Theta_c(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\Delta Q}{T_{co} \cdot c \cdot \gamma}.$$

После преобразования по Лапласу последнего уравнения, получим

$$\bar{\Theta}_c''(x, p) - \frac{p}{a} \bar{\Theta}_c(x, p) + \frac{T_o}{a} + \frac{\Delta Q}{p T_{co} c \gamma a} = 0,$$

где $\Theta_c(x, \tau) \doteq \bar{\Theta}_c(x, p)$, а штрихами обозначена производная по координате.

Решение для изображения может быть записано [2] в виде

$$\bar{\Theta}_c(x, p) - \frac{T_o}{p} = \frac{\Delta Q}{p^2 T_{co} \cdot c \gamma} + A \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot x. \quad (3)$$

Граничное условие ($x = \delta$).

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \Delta T_c(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\delta} &= \frac{\Delta T_c(x, \tau)}{T_{co}} \left[\frac{\alpha_c F_c}{\lambda F_c} + \frac{4 T_{co}^3 \cdot \varphi \cdot \varepsilon_n C_o F_n}{100^4 \lambda F_c} \right] + \\
& + \frac{\Delta T_b(\tau)}{T_{во}} \left[\frac{\alpha_n F_n T_{во}}{T_{co} \lambda F_c} - \frac{T_{во} \cdot \alpha_c}{T_{co} \lambda} \right] - \\
& - \frac{\Delta T_n(\tau)}{T_{но}} \left[\frac{\alpha_n \cdot F_n \cdot T_{но}}{T_{co} \lambda F_c} + \frac{4 T_{но}^4 \varphi \varepsilon_n C_o F_n}{\lambda F_c T_{co} \cdot 100^4} \right]. \quad (4)
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T_{\text{в}}(\tau)}{T_{\text{во}}} &= \Theta_{\text{в}}(\tau), \quad \frac{\Delta T_{\text{п}}(\tau)}{T_{\text{но}}} = \Theta_{\text{п}}(\tau); \\ \beta &= \frac{100^4 \alpha_{\text{с}} F_{\text{с}} + 4T_{\text{со}}^3 \varphi \varepsilon_{\text{п}} C_{\text{о}} F_{\text{п}}}{100^4 \lambda F_{\text{с}}}; \\ \beta_1 &= \frac{T_{\text{во}}}{T_{\text{со}}} \cdot \frac{\alpha_{\text{п}} F_{\text{п}} - \alpha_{\text{с}} F_{\text{с}}}{\lambda F_{\text{с}}}; \\ \beta_2 &= \frac{T_{\text{но}}}{T_{\text{со}}} \cdot \frac{100^4 \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}} + 4T_{\text{но}}^3 \varphi \varepsilon_{\text{п}} C_{\text{о}} F_{\text{п}}}{100^4 \lambda F_{\text{с}}}.\end{aligned}$$

С учетом новых обозначений уравнение (4) после преобразования по Лапласу принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\Theta}_{\text{с}}(x, p)}{\partial x} + \beta \bar{\Theta}_{\text{с}}(x, p) + \beta_1 \bar{\Theta}_{\text{в}}(p) + \beta_2 \bar{\Theta}_{\text{п}}(p) = 0. \quad (5)$$

Уравнение нагрева изделия:

$$\begin{aligned}\Delta T_{\text{п}}(\tau) \cdot \left(C_{\text{п}} G_{\text{о}} + \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}} + \frac{4 \cdot \varphi \varepsilon_{\text{п}} C_{\text{о}} F_{\text{п}} T_{\text{но}}^3}{100^4} \right) - \\ - \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}} \Delta T_{\text{в}}(\tau) - \frac{\Delta T_{\text{с}}(x, \tau)}{T_{\text{со}}} \cdot \frac{4 \varphi \varepsilon_{\text{п}} C_{\text{о}} F_{\text{п}} T_{\text{со}}^4}{100^4} = 0.\end{aligned} \quad (6)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\beta' &= \frac{4 \varphi \varepsilon_{\text{п}} C_{\text{о}} F_{\text{п}} T_{\text{со}}^3}{100^4}, \quad \beta'_1 = \frac{T_{\text{во}}}{T_{\text{со}}} \cdot \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}}, \\ \beta'_2 &= \frac{T_{\text{но}}}{100^4 T_{\text{со}}} (C_{\text{п}} G_{\text{о}} + 100^4 \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}} + 4 \varphi \varepsilon_{\text{п}} C_{\text{о}} F_{\text{п}} T_{\text{но}}^3).\end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений после преобразования уравнения (6) по Лапласу получим

$$\beta' \bar{\Theta}_{\text{с}}(x, p) + \beta'_1 \bar{\Theta}_{\text{в}}(p) - \beta'_2 \bar{\Theta}_{\text{п}}(p) = 0 \quad (7)$$

Уравнение нагрева воздуха:

$$\alpha_{\text{с}} F_{\text{с}} \Delta T_{\text{с}}(x, \tau) - \Delta T_{\text{в}}(\tau) (C_{\text{в}} m_{\text{в}} + \alpha_{\text{с}} F_{\text{с}} + \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}}) + \Delta T_{\text{п}}(\tau) \cdot \alpha_{\text{п}} \cdot F_{\text{п}} = 0.$$

С учетом обозначений:

$$\begin{aligned}\beta''_1 &= \frac{T_{\text{во}}}{T_{\text{со}}} \cdot \frac{C_{\text{в}} m_{\text{в}} + \alpha_{\text{с}} F_{\text{с}} + \alpha_{\text{п}} F_{\text{п}}}{\alpha_{\text{с}} F_{\text{с}}}, \\ \beta''_2 &= \frac{T_{\text{но}}}{T_{\text{со}}} \cdot \frac{\alpha_{\text{п}} F_{\text{п}}}{\alpha_{\text{с}} F_{\text{с}}},\end{aligned}$$

применяя преобразование Лапласа, перепишем уравнение (8)

$$\bar{\Theta}_{\text{с}}(x, p) - \beta''_1 \bar{\Theta}_{\text{в}}(p) + \beta''_2 \bar{\Theta}_{\text{п}}(p) = 0. \quad (9)$$

Решая совместно (3), (5), (7), (9), относительно интересующих переменных, получим

$$\bar{\Theta}_{\text{в}}(p) \left(\beta^* \beta + \beta^* \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta - \beta^* \frac{\beta_2 \beta'}{\beta_2'} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta_1 \beta'_2 - \beta_2 - \beta'_1}{\beta'_2} \Big) - \frac{T_0}{p} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta - \\
& - \frac{\Delta Q}{p^2 T_{co} c \gamma} \sqrt{\frac{p}{a}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta = 0, \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$\beta^* = \frac{\beta'_1 \beta'_2 - \beta'_2 \beta'_1}{\beta'_2 + \beta'_2 \beta'_1}.$$

Передаточная функция $W(p)$ является оператором динамической связи между входной (мощностью, подводимой к печи) и выходной (температурой воздуха в камере печи) величинами. Согласно (10), запишем:

$$\begin{aligned}
W(p) &= \frac{A \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta}{p \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta + B \sqrt{p}} = \\
&= \frac{A \left(\exp 2 \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta - 1 \right)}{p \left(\exp 2 \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta - 1 \right) + B \sqrt{p} \left(\exp 2 \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot \delta + 1 \right)}, \quad (11)
\end{aligned}$$

где

$$A = \frac{\Delta Q}{T_{co} c \gamma \beta^*}, \quad B = \frac{\sqrt{a} \beta \beta'_2 \beta^* - \beta_2 \beta' \beta^* + \beta_1 \beta'_2 - \beta_2 \beta'_1}{\beta^* \beta'_2}.$$

Передаточная функция (11) печи представляет собой трансцендентное выражение. Дальнейшие операции с таким выражением достаточно затруднительны. Поэтому необходимо заменить точное выражение (11) аппроксимирующей передаточной функцией в виде многочленов от оператора p .

В [3] описан метод определения аппроксимирующей передаточной функции по известным коэффициентам разложенной в бесконечный ряд исходной передаточной функции. Однако указанный метод не всегда приводит к удовлетворительному результату.

Другой метод приближения основан на применении дробей Паде [4] для монотонных ограниченных процессов. В работе [4] использовано понятие инерционности S переходного монотонного процесса, введенное для определения коэффициентов передаточных функций и являющейся обобщением понятия постоянной времени процесса. Выражение для S_n имеет [4] вид:

$$S_n = (-1)^n \frac{1}{n!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^n W(p)}{dp^n}.$$

Приближение передаточной функции печи дробями Паде, выраженное через инерционности соответствующих порядков, имеет вид

$$W(p) = \frac{S_0}{1 + \frac{S_1}{S_0} p + \left[\left(\frac{S_1}{S_0} \right)^2 - \frac{S_2}{S_0} \right] p^2}, \quad (12)$$

где

$$S_0 = \frac{A \cdot \delta}{B a}, \quad S_1 = \frac{A \delta^2 (4 + B \delta)}{4 B^2 a^2}, \quad S_2 = \frac{A^2 \delta^2 (16 + B \delta)}{96 B^4 a^4}.$$

С помощью указанного метода достигается приближенное выражение сложной трансцендентной функции дробнорациональной, что соответствует аппроксимации кривой переходного процесса интегральной кривой некоторого однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

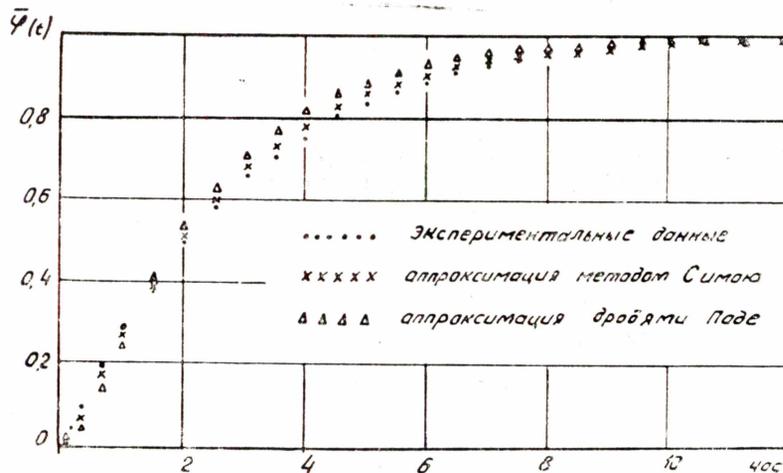


Рис. 2.

Основным результатом применения метода [4] к задаче аналитической аппроксимации трансцендентной передаточной функции является то, что коэффициенты упрощенной передаточной функции удалось выразить через конструктивные параметры печи. Теоретические результаты, приведенные в работе, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Для подтверждения теоретического результата была определена передаточная функция эмали печи типа М-24. Выражение для переходной функции, найденное из экспериментально снятой кривой разгона методом Симою [3] дает следующую зависимость:

$$\bar{\varphi}[t] = 1 - 1,05 e^{-\frac{t}{2,49}} + 0,06 e^{-\frac{t}{0,133}}$$

Результат аппроксимации аналитического выражения (11) при помощи интерполяционных дробей Паде показывает, что

$$\bar{\varphi}(t) = 1 - 1,47 e^{-\frac{t}{1,76}} + 0,466 e^{-\frac{t}{0,56}}$$

Сравнение результатов теоретического анализа с экспериментальными данными приведено на рис. 2.

Следует отметить, что описанная методика позволяет успешно рассчитывать динамические характеристики печей с хорошей теплоизоляцией, либо если потери тепла в окружающую среду могут быть легко учтены.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Фельдман, Г. К. Рубин, З. Л. Трейзон. Исследование тепловой инерционности электропечей сопротивления. Труды ВНИИЭТО, вып. 1, 1965.
2. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952.
3. М. П. Симою. Определение коэффициентов передаточных функций линейризованных звеньев и систем авторегулирования. «Автоматика и телемеханика», 18, № 6, 1957.
4. Б. Н. Девятков. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. СО АН СССР, Новосибирск, 1964.