ИЗВЕСТИЯ ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 208 1974

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ САР С ПОМОЩЬЮ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЧЕБЫШЕВА

В. М. ОСИПОВ, Г. И. ЯМЩИКОВ

(Представлена научным семинаром кафедры АиТ)

В [5] описан метод оптимизации параметров линейной САР с помощью экспоненциальных функций Чебышева для случая, когда в качестве оптимальной (желаемой) передаточной функции берется функция типа

$$W_{\text{оп}}(p) = \frac{K_{\text{оп}}}{Tp+1}. \tag{1}$$

Однако, как показано в [6], желаемая передаточная функция может иметь вид

$$W_{\text{оп}}(p) = K_{\text{оп}} \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{(T'_1 p+1)(T'_2 p+1)\ldots(T'_s p+1)\cdot K_{\text{оп}}}{(T_1 p+1)\cdot(T_2 p+1)\ldots(T_l p+1)}, \; (l>s). \tag{2}$$

В связи с этим возникает необходимость обобщения метода оптимизации, описанного в [5].

Пусть задана передаточная функция замкнутой линейной САР

$$W(p) = \frac{C(p)}{D(p)} = \frac{c_0 p^m + c_1 p^{m-1} + \ldots + c_{m-1} p + c_m}{d_0 p^n + d_1 p^{n-1} + \ldots + d_{n-1} p + d_n}, \; (n>m), \tag{3}$$

в которой часть параметров известна, а остальные необходимо определить из условия приближения к желаемой передаточной функции (2).

При единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях передаточной функции (2) соответствует переходная характеристика

$$y_{\text{оп}}(t) = K_{\text{оп}}\cdot\left(1 + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{A}_i \cdot e^{-N_i\cdot t}\right), \tag{4}$$

где A_i — постоянные коэффициенты, определяемые по формуле

$$\mathrm{A}_i = \frac{R(-N_i)}{(-N_i)\cdot Q'(-N_i)}; \tag{5}$$

$p_i = -\dfrac{1}{T_i} = -N_i$ — корни характеристического полинома передаточной функции (2);

$K_{\text{оп}} = W(0)$ — коэффициент передачи замкнутой системы.

Если обозначить через $\Delta y(t)$ ошибку приближения переходной характеристики оптимизируемой системы $y(t)$ к оптимальной переходной характеристике $y_{\text{оп}}(t)$, то

$$\Delta y(t) = y(t) - y_{\text{оп}}(t) = y(t) - W(0)\left(1 + \sum_{i=1}^{l} A_i \cdot e^{-N_i t}\right) \qquad (6)$$

Очевидно, что $\Delta y(0) = \Delta y(\infty) = 0$. В этом случае $\Delta y(t)$ можно разложить в ряд Фурье по экспоненциальным функциям Чебышева III рода [4]

$$\Delta y(t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Delta y_\kappa \cdot S_\kappa(t), \qquad (7)$$

где $\Delta y_\kappa (\kappa = 1, 2, 3, \ldots)$ — коэффициенты Фурье [3]:

$$\Delta y_\kappa = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{at}{2}} \cdot \Delta y(t) \cdot S_\kappa(t)}{\sqrt{1 - e^{-at}}}\, dt. \qquad (8)$$

Учитывая, что операторное изображение для $\Delta y(t)$ равно

$$\Delta Y(p) = \frac{W(p)}{p} - W(0)\left(\frac{1}{p} + \sum_{i=1}^{l} \frac{A_i}{p + N_i}\right), \qquad (9)$$

для нескольких первых κ имеем

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= \frac{4a}{\pi} \cdot \Delta Y(a), \\ \Delta y_2 &= \frac{4a}{\pi}\left[-2\Delta Y(a) + 4\Delta Y(2a)\right], \\ \Delta y_3 &= \frac{4a}{\pi}\left[3\Delta Y(a) - 16\Delta Y(2a) + 16\Delta Y(3a)\right] \ldots . \end{aligned} \qquad (10)$$

Условием точного совпадения искомой и желаемой переходных характеристик будет $\Delta y(t) = 0$.

В общем случае мы не можем достичь точного выполнения этого условия. Однако можно попытаться выполнить его приближенно, приравнивая к нулю несколько первых коэффициентов Фурье Δy_κ:

$$\Delta y_\kappa = 0, \ (\kappa = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (11)$$

Следовательно, условие точного совпадения искомой и желаемой переходных характеристик на всем непрерывном полубесконечном отрезке заменяется условием совпадения искомой и желаемой передаточных функции в дискретном ряде точек

$$W(\kappa a) - W_{\text{оп}}(\kappa a) = 0, \ (\kappa = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (12)$$

Учитывая (3) и (10), получаем

$$\frac{C(\kappa a)}{D(\kappa a)} = W(0)\left(1 + \kappa a \sum_{i=1}^{l} \frac{A_i}{\kappa a + N_i}\right), \ (\kappa = 1, 2, 3, \ldots, n). \qquad (13)$$

Как показано в [4], параметр «а» следует принимать равным минимальному из корней характеристического полинома передаточной функции (2).

Выражению (13) соответствует система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров системы:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}\cdot x_1 + \alpha_{12}\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{1r}\cdot x_r &= b_1 \\ \alpha_{21}\cdot x_1 + \alpha_{22}\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{2r}\cdot x_r &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\cdot x_1 + \alpha_{n2}\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{nr}\cdot x_r &= b_n \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Если ранг расширенной матрицы и матрицы системы (14) равен числу неизвестных параметров r, то полученное решение будет точно удовлетворять условию (11). Однако, как показывает анализ, при этом решение может оказаться некорректным.

Задача будет регуляризована, если систему переопределить и обработать ее с помощью метода наименьших квадратов.

Запишем систему (14) в матричной форме

$$A\cdot x = B, \tag{15}$$

где A— не квадратная матрица, а матрица, содержащая больше строк, чем столбцов;

B — матрица-столбец.

Чтобы выправить переопределенную систему (15), нужно, как показано в [1], умножить обе части матричного уравнения на транспонированную матрицу $\tilde{A}$, т. е.

$$\tilde{A}\cdot A\cdot x = \tilde{A}\cdot B. \tag{16}$$

Рассмотрим пример.

(Пример заимствован из [2], стр. 119).

Передаточная функция по углу между вектором Э. Д. С. и вектором напряжения U синхронного генератора при внезапном малом изменении нагрузки имеет вид:

$$W(p) = \frac{c_0p^2 + c_1p + c_2}{d_0p^4 + d_1p^3 + d_2p^2 + d_3p + d_4}, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= 0{,}287 - 0{,}389\beta_2 - 0{,}632\gamma_2, \\ c_1 &= 4{,}86 - 0{,}389\beta_1 - 0{,}632\gamma_1, \\ c_2 &= 10{,}2, \\ d_0 &= (1{,}21 - 1{,}63\beta_2 - 2{,}65\gamma_2)\cdot 10^{-2}, \\ d_1 &= (20{,}5 - 1{,}63\beta_1 - 0{,}124\beta_2 + 2{,}65\gamma_1 + 0{,}201\gamma_2)\cdot 10^{-2}, \\ d_2 &= (56{,}8 - 0{,}124\beta_1 + 29{,}3\beta_2 - 0{,}201\gamma_1 - 39{,}9\gamma_2)\cdot 10^{-2}, \\ d_3 &= 2{,}13 + 0{,}293\beta_1 - 0{,}399\gamma_1,\ d_4 = 6{,}57. \end{aligned} \tag{18}$$

Необходимо определить коэффициенты усиления β_1, β_2, γ_1 и γ_2 из условия приближения передаточной функции (17) к желаемой передаточной функции

$$W_{\text{оп}}(p) = \frac{62{,}1}{(p+2)(p+20)}. \tag{19}$$

Перепишем уравнение (14) для нашего случая

$$\frac{C(\kappa a)}{D(\kappa a)} = \frac{62{,}1}{(\kappa a+2)(\kappa a+20)},\ (\kappa = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{20}$$

Принимаем $a = 2$.

Учитывая (17), получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}62{,}1\cdot D(a)-(a+2)(a+20)\cdot C(a)=0\\ 62{,}1\cdot D(2a)-(2a+2)(2a+20)\cdot C(2a)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 62{,}1\cdot D(na)-(na+2)(na+20)\cdot C(na)=0\end{array}\right\}\qquad(21)$$

Решение этой системы при $n=4$ дает отрицательный результат: при полученных β_1, β_2, γ_1 и γ_2 система оказывается неустойчивой. Систему (21) нужно переопределить. Принимаем $n=8$.

В этом случае с учетом (18) получаем систему линейных алгебраических уравнений.

Запишем ее в матричной форме

$$A\cdot x=B,\qquad(22)$$

где

$$A=\begin{vmatrix}1{,}5549 & 3{,}1098 & 1{,}2000 & 1{,}5842\\ 3{,}7229 & 14{,}892 & 5{,}9392 & 10{,}447\\ 6{,}0228 & 36{,}137 & 15{,}979 & 28{,}005\\ 7{,}9729 & 63{,}783 & 33{,}081 & 49{,}619\\ 9{,}0927 & 90{,}927 & 59{,}006 & 64{,}084\\ 8{,}9008 & 106{,}81 & 95{,}516 & 54{,}136\\ 6{,}9159 & 96{,}823 & 144{,}38 & -3{,}8023\\ 2{,}6542 & 42{,}467 & 207{,}34 & -139{,}61\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}14{,}968\\ 39{,}112\\ 66{,}947\\ 90{,}123\\ 97{,}399\\ 74{,}661\\ 5{,}0170\\ -131{,}51\end{vmatrix}$$

После обработки системы (22) с помощью метода наименьших квадратов получим:

$$\left.\begin{array}{l}0{,}057224\cdot\beta_1+0{,}38250\beta_2+0{,}35042\gamma_1+0{,}15176\gamma_2=0{,}48304\\ 0{,}38250\cdot\beta_1+3{,}7417\beta_2+4{,}1500\gamma_1+1{,}0140\gamma_2=2{,}5137\\ 0{,}35042\cdot\beta_1+4{,}1500\beta_2+7{,}7969\gamma_1-1{,}8242\gamma_2=-0{,}75856\\ 0{,}15176\cdot\beta_1+1{,}0140\beta_2-1{,}8242\gamma_1+3{,}0152\gamma_2=3{,}7755\end{array}\right\}\qquad(29)$$

Решая систему (23), находим значения искомых коэффициентов

$$\beta_1=8{,}4743,\quad \gamma_1=-1{,}1450,$$
$$\beta_2=1{,}1432,\quad \gamma_2=-0{,}25000.$$

Учитывая (18), определим коэффициенты передаточной функции системы:

$$\begin{array}{ll}c_0=0{,}00029, & d_0=0{,}000091,\\ c_1=2{,}2871, & d_1=0{,}034609,\\ c_2=10{,}2, & d_2=0{,}99450,\\ & d_3=5{,}0699,\\ & d_4=6{,}57.\end{array}$$

Представление о качестве оптимизации дает табл. 1, в которой приведены вещественные частотные характеристики искомой и оптимальной систем:

Таблица 1

w	0	0,1	0,3	0,5	0,7	1,0	1,5
$P_{\text{оп}}(w)$	1,5525	1,5483	1,5147	1,4511	1,3845	1,2080	0,9325
$P(w)$	1,5525	1,5483	1,5154	1,4532	1,3877	1,2119	0,9342

w	2,5	5,0	7,5	10	15	20	50
$P_{\text{оп}}(w)$	0,5033	0,0756	0,0367	—0,0717	—0,0803	—0,069	—0,020
$P(w)$	0,4963	0,0709	0,0329	—0,0649	—0,0757	—0,068	—0,024

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1961.
2. И. А. Орурк. Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем. Изд. «Наука», 1965.
3. В. М. Осипов. Экспоненциальные полиномы и разложения некоторых типовых сигналов. Изд. ТГУ, Томск, Изв. ТПИ, том 180, 1968.
4. В. М. Осипов. К вопросу о приближенном обращении преобразования Лапласа. Изд. ТГУ, Томск, Изв. ТПИ, том 191, 1969.
5. В. М. Осипов, Г. И. Ямщиков. Оптимизация параметров линейной САР с помощью экспоненциальных функций Чебышева. Изд. ТГУ, Томск, Изв. ТПИ, том 230.
6, Н. И. Соколов. Аналитический метод синтеза линеаризованных систем автоматического регулирования. Изд. «Машиностроение», М., 1966.