ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 209 1976

О СОВПАДЕНИИ НАПРАВЛЯЮЩИХ ТЕНЗОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Г. А. ДОЩИНСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Одной из исходных предпосылок математической теории пластичности является предположение о совпадении направляющих тензоров напряжений и деформаций [1], [2].

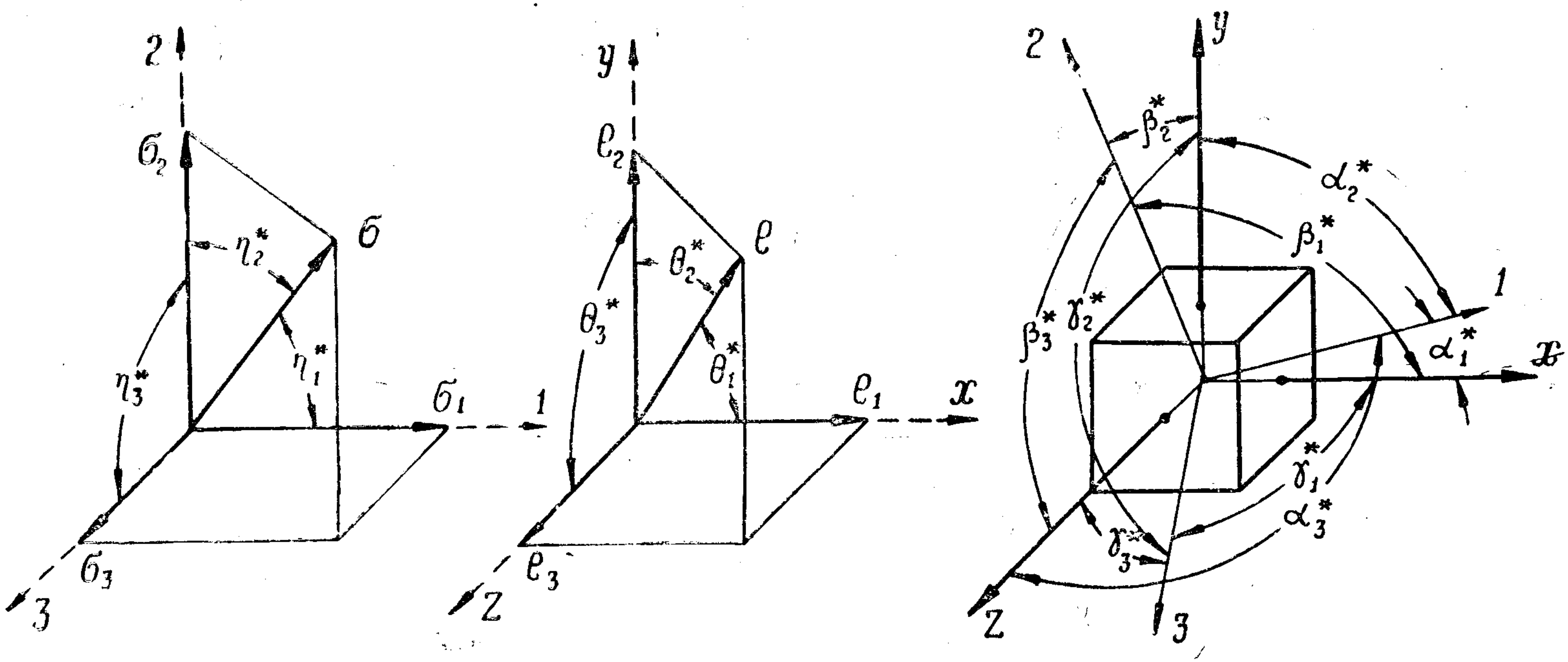
$$(\overline{D}_s) = (\overline{D}_\varepsilon).$$

Нередко это условие представляется в виде двух отдельных положений: 1. Главные направления напряженного и деформированного состояния совпадают. 2. Максимальные касательные напряжения пропорциональны максимальным сдвигам. Однако обоснованию этих исходных положений уделяется мало внимания. В одних случаях они рассматриваются как необходимые исходные гипотезы, в других как следствие экспериментальных наблюдений.

В то же время можно показать, что эти положения находятся в прямой связи с известным минималистическим принципом, определяющим условия протекания естественных равновесных процессов, а именно, являются необходимыми условиями экстремума работы процесса упруго-пластической деформации. Ранее подобным образом уже рассматривался вопрос о совпадении главных напряжений и деформаций [4], являющийся частью общего решения, приводимого ниже.

Проведенное решение имеет непосредственное отношение к условиям простого нагружения, но в том же виде выполняется и в общем случае загружения, если в решении заменить главные деформации приращениями главных удлинений. Поэтому выводы приобретают общий характер, при условии сохранения изотропности материала.

Напряженное состояние в окрестности некоторой точки тела полностью определяется тремя ортогональными главными напряжениями: σ_1, σ_2, σ_3. Для полностью изотропного тела, к тому же одинаково работающего на растяжение и сжатие направленность векторов σ_1, σ_2, σ_3 относительно материальных частиц тела при решении отдельных вопросов может не иметь какого-либо значения. Совмещая напряжения σ_1, σ_2, σ_3 с некоторой произвольной системой координат 1, 2, 3, введем вектор σ, проекции которого на оси 1, 2, 3 равнялись бы скалярным значениям, соответствующим величине напряжений σ_1, σ_2, σ_3. Модуль такого вектора может дать представление о степени напряженности тела в данной точке, а его направленность в системе координат 1, 2, 3 может характеризовать вид напряженного состояния. В частности, при одинаковом отклонении σ от осей 1, 2, 3 будем иметь дело с всесто-



2
σ_2
η_2^*
σ
η_1^*
η_3^*
σ_1
1
σ_3
3
y
e_2
θ_2^*
e
θ_3^*
θ_1^*
e_1
x
e_3
z
2
y
β_2^*
α_2^*
β_1^*
1
γ_2^*
β_3^*
α_1^*
x
γ_1^*
α_3^*
γ_3^*
z
3

Рис. 1

ронним равномерным растяжением (гидростатическим давлением в отрицательном октанте осей 1, 2, 3). Косинусы углов между σ и осями координат 1, 2, 3 обозначим соответственно; η_1, η_2, η_3 (рис. 1).

Деформированное состояние в рассматриваемой точке тела может быть охарактеризовано тремя главными удлинениями: e_1, e_2 e_3. Аналогично предыдущему в пространство координат x, y, z введем вектор деформации e с проекциями на оси координат, соответствующими величинам e_1, e_2, e_3, и косинусами углов с осями x, y, z, равными Θ_1, Θ_2, Θ_3. Естественная исходная ненапряженность тела соответствует совмещению начал координатных систем 1, 2, 3 и x, y, z.

Рассматривая процесс деформации со связанными осями x, y, z направлениями главных удлинений, можно в произвольный момент за некоторый промежуток времени представить бесконечно малые приращения главных удлинений в виде: $de_2 = d(e \cdot \Theta_2) = de \cdot \Theta_2 + d\Theta_2 \cdot e$, $de_1 = d(e \cdot \Theta_1) = de \cdot \Theta_1 + d\Theta_1 \cdot e$, $de_3 = d(e \cdot \Theta_3) = de \cdot \Theta_3 + d\Theta_3 \cdot e$. Выражая в общем виде связь между напряжениями и деформациями, можно предположить, что в этот момент времени направления главных напряжений не совпадают с направлениями главных удлинений. При этом напряжения: σ_1, σ_2, σ_3 образуют с осью X углы, косинусы которых соответственно равны: α_1, β_1, γ_1; с осью Y—α_2, β_2, γ_2; с осью Z—α_3, β_3, γ_3. Считая, что монотонный процесс деформации связан с монотонным изменением напряжений, выделяя элементарный кубик с гранями, перпендикулярными главным направлениям деформации, выразим напряжения по его граням:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cdot \alpha_1^2 + \alpha_2 \cdot \beta_1^2 + \alpha_3 \cdot \gamma_1^2 = \sigma(\eta_1 \cdot \alpha_1^2 + \eta_2 \cdot \beta_1^2 + \eta_3 \cdot \gamma_1^2),$$
$$\sigma_y = \sigma_1 \cdot \alpha_2^2 + \sigma_2 \cdot \beta_2^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_2^2 = \sigma(\eta_1 \cdot \alpha_2^2 + \eta_2 \cdot \beta_2^2 + \eta_3 \cdot \gamma_2^2),$$
$$\sigma_z = \sigma_1 \cdot \alpha_3^2 + \sigma_2 \cdot \beta_3^2 + \sigma_3 \cdot \gamma_3^2 = \sigma(\eta_1 \cdot \alpha_3^2 + \eta_2 \cdot \beta_3^2 + \eta_3 \cdot \gamma_3^2).$$

По граням такого кубика будут и касательные напряжения. Но так как грани кубика перпендикулярны главным направлениям деформации и, следовательно, не перекашиваются, то приращение работы деформации определится лишь выражением

$$dA = \sigma_x \cdot de_1 + \sigma_y \cdot de_2 + \sigma_z \cdot de_3.$$

Работа деформации при изменении параметра нагружения λ

$$A = \int_0^\lambda \sigma\,[\eta_1 \cdot \alpha_1^2 + \eta_2 \cdot \beta_1^2 + \eta_3 \cdot \gamma_1^2)(e' \cdot \Theta_1 + \Theta_1' \cdot e) +$$
$$+ (\eta_1 \cdot \alpha_2^2 + \eta_2 \cdot \beta_2^2 + \eta_3 \cdot \gamma_2^3)(e' \cdot \Theta_2 + \Theta_2' \cdot e) + (\eta_1 \cdot \alpha_3^2 + \eta_2 \cdot \beta_3^2 +$$
$$+ \eta_3 \cdot \gamma_3^2)(e' \cdot \Theta_3 + \Theta_3' \cdot e)]\, d\lambda,$$

где все входящие величины предполагаются монотонными функциями параметра нагружения λ.

Так как косинусы входящих сюда угловых величин связаны между собой определенными соотношениями, то определение условий, при которых работа процесса деформации экстремальна, приводит к следующей задаче вариационного исчисления: Определить функции $U_1(\lambda)$; $U_2(\lambda)$;...$U_n(\lambda)$, дающие экстремум интегралу

$$I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F\,[\lambda;\ U_1(\lambda);\ U_2(\lambda);\ \ldots\ U_n(\lambda)]\, d\lambda,$$

причем искомые функции, кроме граничных условий и условий непрерывности, должны удовлетворять некоторым дополнительным требованиям относительно всего промежутка интегрирования. Если дополнительные условия представляются системой m уравнений связей $(m<n)$

$$\Phi_i\,[\lambda;\ U_1(\lambda);\ U_2(\lambda);\ \ldots\ldots\ U_n(\lambda)],$$

то искомые функции (т. е. условия, дающие экстремум интегралу I), определяются системой уравнений

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial F_1}{\partial\cdot U_i'(\lambda)}\right]-\frac{\partial F_1}{\partial U_i(\lambda)}=0,$$

где $F_i=F+\sum\varphi_i(\lambda)\cdot\Phi_i\,(i=1\div m)$ и m уравнений связей. Уравнения связей в рассматриваемом случае представятся системой уравнений, определяющих взаимную ориентацию и ортогональность осей главных напряжений и деформаций.

$$\begin{aligned}&\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2=1 \quad (i=\kappa)\\ &\alpha_i\cdot\alpha_\kappa+\beta_i\cdot\beta_\kappa+\gamma_i\cdot\gamma_\kappa=0 \quad (i\neq\kappa)\end{aligned}\qquad (i,\ \kappa=1,\ 2,\ 3)$$

и соотношениями для косинусов углов η и Θ. Вспомогательная функция F_1 принимает вид:

$$\begin{aligned}F_1&=\sigma(\eta_1\cdot\alpha_1^2+\eta_2\cdot\beta_1^2+\eta_3\cdot\gamma_1^2)(e'\cdot\Theta_1+\Theta_1'\cdot e)+\sigma(\eta_1\cdot\alpha_2^2+\eta_2\cdot\beta_2^2+\\&+\eta_3\cdot\gamma_2^2)(e'\cdot\Theta_2+\Theta_2'\cdot e)+\sigma(\eta_1\cdot\alpha_3^2+\eta_2\cdot\beta_3^2+\gamma_3^2\cdot\eta_3)(e'\cdot\Theta_3+\Theta_3'\cdot e)+\\&+\varphi_1(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2-1)+\varphi_2(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2-1)+\varphi_3(\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2-1)+\\&+\varphi_4(\alpha_1\cdot\alpha_2+\beta_1\cdot\beta_2+\gamma_1\cdot\gamma_2)+\varphi_5(\alpha_2\cdot\alpha_3+\beta_2\cdot\beta_3+\gamma_2\cdot\gamma_3)+\\&+\varphi_6(\alpha_1\cdot\alpha_3+\beta_1\cdot\beta_3+\gamma_1\cdot\gamma_3)+\varphi_7(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2-1)+\varphi_8(\Theta_1^2+\Theta_2^2+\Theta_3^2-1),\end{aligned}$$

где $\varphi_i(\lambda)$ — неопределенные функциональные множители Лагранжа. Условия, определяющие экстремум работы процесса деформации, представляются теперь следующей системой уравнений:

$$1.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_1'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_1}=2\sigma\eta_1\,\alpha_1\,(e'\cdot\Theta_1+\Theta_1'\cdot e)+2\varphi_1\cdot\alpha_1+\varphi_4\cdot\alpha_2+\varphi_6\cdot\alpha_3=0$$

$$2.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\beta_1'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\beta_1}=2\sigma\eta_2\,\beta_1\,(e'\cdot\Theta_1+\Theta_1'\cdot e)+2\varphi_1\cdot\beta_1+\varphi_4\cdot\beta_2+\varphi_6\cdot\beta_3=0$$

$$3.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_1'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_1}=2\sigma\eta_3\,\gamma_1\,(e'\cdot\Theta_1+\Theta_1'\cdot e)+2\varphi_1\cdot\gamma_1+\varphi_4\cdot\gamma_2+\varphi_6\cdot\gamma_3=0$$

$$4.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_1'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_2}=2\sigma\eta_1\,\alpha_2\,(e'\cdot\Theta_2+\Theta_2'\cdot e)+2\varphi_2\cdot\alpha_2+\varphi_4\cdot\alpha_1+\varphi_5\cdot\alpha_3=0$$

$$5.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\beta_2'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\beta_2}=2\sigma\eta_2\,\beta_2\,(e'\cdot\Theta_2+\Theta_2'\cdot e)+2\varphi_2\cdot\beta_2+\varphi_4\cdot\beta_1+\varphi_5\cdot\beta_3=0$$

$$6.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_2'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_2}=2\sigma\eta_3\,\gamma_2\,(e'\cdot\Theta_2+\Theta_2'\cdot e)+2\varphi_2\cdot\gamma_2+\varphi_4\cdot\gamma_1+\varphi_5\cdot\gamma_3=0$$

$$7.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_3'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_3}=2\sigma\eta_1\,\alpha_3\,(e'\cdot\Theta_3+\Theta_3'\cdot e)+2\varphi_3\cdot\alpha_3+\varphi_5\cdot\alpha_2+\varphi_6\cdot\alpha_1=0$$

$$8.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\beta_3'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\beta_3}=2\sigma\eta_2\,\beta_3\,(e'\cdot\Theta_3+\Theta_3'\cdot e)+2\varphi_3\cdot\beta_3+\varphi_5\cdot\beta_2+\varphi_6\cdot\beta_1=0$$

$$9.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_3'}\right)-\frac{\partial F_1}{\partial\gamma_3}=2\sigma\eta_3\,\gamma_3\,(e'\cdot\Theta_3+\Theta_3\cdot e)+2\,\varphi_3\,\gamma_3+\varphi_5\cdot\gamma_2+\varphi_6\cdot\gamma_1=0$$

$$10.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \eta_1'}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial \eta_1} = \sigma\alpha_1^2(e'\cdot\Theta_1 + \Theta_1'\cdot e) + \sigma\alpha_2^2(e'\cdot\Theta_2 + \Theta_2'\cdot e) +$$
$$+ \sigma\alpha_3^2(e'\cdot\Theta_3 + \Theta_3'\cdot e) + 2\varphi_7\cdot\eta_1 = 0$$

$$11.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \eta_2'}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial \eta_2} = \sigma\beta_1^2(e'\cdot\Theta_1 + \Theta_1'\cdot e) + \sigma\beta_2^2(e'\cdot\Theta_2 + \Theta_2'\cdot e) +$$
$$+ \sigma\beta_3^2(e'\cdot\Theta_3 + \Theta_3'\cdot e) + 2\varphi_7\cdot\eta_2 = 0$$

$$12.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \eta_3'}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial \eta_3} = \sigma\gamma_1^2(e'\cdot\Theta_1 + \Theta_1'\cdot e) + \sigma\gamma_2^2(e'\cdot\Theta_2 + \Theta_2'\cdot e) +$$
$$+ \sigma\gamma_3^2(e'\cdot\Theta_3 + \Theta_3'\cdot e) + 2\varphi_7\cdot\eta_3 = 0$$

$$13.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \Theta_1'}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial \Theta_1} = [\sigma e(\eta_1\alpha_1^2 + \eta_2\beta_1^2 + \eta_3\gamma_1^2)] -$$
$$- \sigma e'(\eta_1\alpha_1^2 + \eta_2\beta_1^2 + \eta_3\gamma_1^2) + 2\varphi_8\cdot\Theta_1 = 0$$

$$14.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \Theta_2'}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial \Theta_2'} = [\sigma e(\eta_1\alpha_2^2 + \eta_2\beta_2^2 + \eta_3\gamma_2^2)] -$$
$$- \sigma e'(\eta_1\alpha_2^2 + \eta_2\beta_2^2 + \eta_3\gamma_2^2) + 2\varphi_8\cdot\Theta_2 = 0$$

$$15.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \Theta_3'}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} = [\sigma e(\eta_1\alpha_3^2 + \eta_2\beta_3^2 + \eta_3\gamma_3^2)] -$$
$$- \sigma e'(\eta_1\alpha_3^2 + \eta_2\beta_3^2 + \eta_3\cdot\gamma_3^2) + 2\varphi_8\cdot\Theta_3 = 0$$

$$16.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma'}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial \sigma} = (\eta_1\alpha_1^2 + \eta_2\beta_1^2 + \eta_3\gamma_1^2)(e'\cdot\Theta_1 + \Theta_1'\cdot e) +$$
$$+ (\eta_1\cdot\alpha_2^2 + \eta_2\cdot\beta_2^2 + \eta_3\cdot\gamma_2^2)(e'\cdot\Theta_2 + \Theta_2'\cdot e) +$$
$$+ (\eta_1\cdot\alpha_3^2 + \eta_2\cdot\beta_3^2 + \eta_3\cdot\gamma_3^2)(e'\cdot\Theta_3 + \Theta_3'\cdot e) = 0$$

$$17.\ \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial F_1}{\partial e'}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial e} =$$

$$[\sigma\cdot\Theta_1(\eta_1\alpha_1^2 + \eta_2\beta_1^2 + \eta_3\gamma_1^2) + \sigma\cdot\Theta_2(\eta_1\alpha_2^2 + \eta_2\beta_2^2 + \eta_3\gamma_2^2) +$$
$$+ \sigma\cdot\Theta_3(\eta_1\alpha_3^2 + \eta_2\beta_3^2 + \eta_3\gamma_3^2)] - [\sigma\cdot\Theta_1'(\eta_1\alpha_1^2 + \eta_2\beta_1^2 + \eta_3\gamma_1^2) +$$
$$+ \sigma\cdot\Theta_2'(\eta_1\alpha_2^2 + \eta_2\beta_2^2 + \eta_3\gamma_2^2) + \sigma\cdot\Theta_3(\eta_1\alpha_3^2 + \eta_2\beta_3^2 + \eta_3\gamma_3^2)] = 0$$

18. $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$	22. $\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0$
19. $\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1$	23. $\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0$
20. $\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1$	24. $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1$
21. $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$	25. $\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2 = 1$

Укажем основные моменты в решении данной системы уравнений. Исключая из $(1 \div 9)$ φ_1, φ_2, φ_3, получим систему 6 уравнений вида:

$$\varphi_4(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) + \varphi_6(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) = 2\sigma(e'\cdot\Theta_1 + \Theta_1'\cdot e)(\eta_1 - \eta_2)\alpha_1\beta_1$$
$$\varphi_4(\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2) + \varphi_6(\alpha_3\gamma_1 - \alpha_1\gamma_3) = 2\sigma(e'\cdot\Theta_1 + \Theta_1'\cdot e)(\eta_1 - \eta_3)\alpha_1\gamma_1$$
$$\varphi_4(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) + \varphi_5(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3) = 2\sigma(e'\cdot\Theta_2 + \Theta_2'\cdot e)(\eta_1 - \eta_2)\alpha_2\beta_2$$
$$\varphi_4(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1) + \varphi_5(\alpha_3\gamma_2 - \alpha_2\gamma_3) = 2\sigma(e'\cdot\Theta_2 + \Theta_2'\cdot e)(\eta_1 - \eta_3)\alpha_2\gamma_2$$
$$\varphi_5(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \varphi_6(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) = 2\sigma(e'\cdot\Theta_3 + \Theta_3'\cdot e)(\eta_1 - \eta_2)\alpha_3\beta_3$$

$$\varphi_5(\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2)+\varphi_6(\alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1)=2\sigma(e'\cdot\Theta_3+\Theta_3'\cdot e)(\eta_1-\eta_3)\alpha_3\gamma_3,$$

которые с помощью соотношений, существующих между косинусами углов при преобразовании координат, могут быть упрощены до вида [3].

$$\varphi_4\gamma_3-\varphi_6\gamma_2=2\sigma e_1'(\eta_2-\eta_1)\alpha_1\beta_1 \quad \varphi_4\beta_3-\varphi_5\beta_1=2\sigma e_2'(\eta_3-\eta_1)\alpha_2\gamma_2.$$

$$\varphi_4\beta_3-\varphi_6\beta_2=2\sigma e_1'(\eta_1-\eta_3)\alpha_1\gamma_1 \quad \varphi_5\gamma_1-\varphi_6\gamma_2=2\sigma e_3'(\eta_1-\eta_2)\alpha_3\beta_3$$

$$\varphi_4\gamma_3-\varphi_5\gamma_1=2\sigma e_2'(\eta_1-\eta_2)\alpha_2\beta_2 \quad \varphi_5\beta_1-\varphi_6\beta_2=2\sigma e_3'(\eta_3-\eta_1)\alpha_3\gamma_3.$$

Отсюда с помощью соотношений для косинусов углов [3] можно выразить значения множителей

$$\varphi_4=2\sigma e_2'(\eta_1\alpha_1\alpha_2+\eta_2\beta_1\beta_2+\eta_3\gamma_1\gamma_2)$$

$$\varphi_5=2\sigma e_3'(\eta_1\alpha_2\alpha_3+\eta_2\beta_2\beta_3+\eta_3\gamma_2\gamma_3)$$

$$\varphi_6=2\sigma e_1'(\eta_1\alpha_1\alpha_3+\eta_2\beta_1\beta_3+\eta_3\gamma_1\gamma_3),$$

а также получить ряд уравнений типа

$$(\sigma_1-\sigma_2)(\Theta_1\alpha_1\beta_1+\Theta_2\alpha_2\beta_2+\Theta_3\alpha_3\beta_3),$$

или

$$(e_1'-e_2')(\eta_1\alpha_1\alpha_2+\eta_2\beta_1\beta_2+\eta_3\gamma_1\gamma_2).$$

Оставляя в стороне частные решения $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ и $e_1'=e_2'=e_3'$, не соответствующие рассматриваемому общему случаю $\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$ $e_1'\neq e_2'\neq e_3'$, получим $\varphi_4=\varphi_5=\varphi_6=0$.

Подстановка значений φ_4, φ_5, φ_6 упрощает уравнения $(1\div 9)$ до вида

$$\alpha_1(\sigma_1e_1'+\varphi_1)=0 \qquad \alpha_2(\sigma_1e_2'+\varphi_2)=0 \qquad \alpha_3(\sigma_1e_3'+\varphi_3)=0$$

$$\beta_1(\sigma_2e_1'+\varphi_1)=0 \qquad \beta_2(\sigma_2e_2'+\varphi_2)=0 \qquad \beta_3(\sigma_2e_3'+\varphi_3)=0$$

$$\gamma_1(\sigma_3e_1'+\varphi_1)=0 \qquad \gamma_2(\sigma_3e_2'+\varphi_2)=0 \qquad \gamma_3(\sigma_3e_3'+\varphi_3)=0$$

Добавляя систему уравнений $(18\div 23)$ и решая совместно для условий $\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$ $(e_1'\neq e_2'=e_3')$ получим:

$$\alpha_1=1 \qquad \alpha_2=0 \qquad \alpha_3=0$$

$$\beta_1=0 \qquad \beta_2=1 \qquad \beta_3=0$$

$$\gamma_1=0 \qquad \gamma_2=0 \qquad \gamma_3=1.$$

Подобные значения косинусов углов, определяющих взаимную ориентацию осей главных направлений напряжений и деформаций, соответствуют совпадению этих осей.

Следовательно, совпадение главных направлений напряжений и деформаций является одним из необходимых условий, обеспечивающих экстремум работы процесса деформации.

Подставляя значение косинусов α_1, β_1.... γ_3 в уравнения $(10\div 17)$, существенно упростим последние до вида:

$$10.\quad \sigma e'\Theta_1+\sigma e\Theta_1'+2\varphi_7\cdot\eta_1=0$$

$$11.\quad \sigma e'\Theta_2+\sigma e\Theta_2'+2\varphi_7\cdot\eta_2=0$$

$$12.\quad \sigma e'\Theta_3+\sigma e\Theta_3'+2\varphi_7\cdot\eta_3=0$$

$$13.\quad e\eta_1\sigma'+\eta_1'\sigma e+2\varphi_8\cdot\Theta_1=0$$

$$14.\quad e\eta_2\sigma'+\eta_2'\sigma e+2\varphi_8\cdot\Theta_2=0$$

$$15.\quad e\eta_3\sigma'+\eta_3'\sigma e+2\varphi_8\cdot\Theta_3=0$$

$$16. \quad e'(\eta_1\Theta_1+\eta_2\Theta_2+\eta_3\Theta_3)+e(\eta_1\Theta_1'+\eta_2\Theta_2'+\eta_3\Theta_3')=0$$

$$17. \quad \sigma'(\eta_1\Theta_1+\eta_2\Theta_2+\eta_3\Theta_3)+\sigma(\eta_1'\Theta_1+\eta_2'\Theta_2+\eta_3'\Theta_3)=0$$

Умножая 10—12, 16 на σ, а 13—15, 17 на e получим:

$$10. \quad e_1'=-\frac{2\varphi_7}{\sigma^2}\sigma_1 \qquad 13. \quad \sigma_1'=-\frac{2\varphi_8}{e^2}e_1$$

$$11. \quad e_2'=-\frac{2\varphi_7}{\sigma^2}\sigma_2 \qquad 14. \quad \sigma_2'=-\frac{2\varphi_8}{e^2}e_2$$

$$12. \quad e_3'=-\frac{2\varphi_7}{\sigma^2}\sigma_3 \qquad 15. \quad \sigma_3'=-\frac{2\varphi_8}{e^2}e_3$$

Откуда при использовании параметров Лоде μ и ν, равенство которых соответствует подобию девиаторов, следует:

$$\nu_{e'}=\frac{2e_2'-e_1'-e_3'}{e_1'-e_3'}=\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}=\mu_\sigma$$

$$\mu_{\sigma'}=\frac{2\sigma_2'-\sigma_1'-\sigma_3'}{\sigma_1'-\sigma_3'}=\frac{2e_2-e_1-e_3}{e_1-e_3}=\nu_e.$$

Для простого нагружения $\sigma_1=\sigma_1'\cdot\lambda$; $\sigma_2=\sigma_2'\cdot\lambda$; $\sigma_3=\sigma_3'\lambda$,
или простого деформирования $e_1=e_1'\cdot\lambda=e_2;=e_2'\cdot\lambda$
приходим к подобию девиаторов напряжений и деформаций (соответственно пропорциональности между сдвигами и касательными напряжениями).

Следовательно, подобие девиаторов является необходимым условием, обеспечивающим экстремум работы процесса деформации.

Уравнения 16, 17 приводят к тривиальным условиям

$$e=\text{const}; \ \sigma=\text{const}.$$

В проведенном решении направления главных удлинений были связаны с используемой системой координат: X, Y, Z, что соответствует условиям простого нагружения — деформирования. Нетрудно представить, что решение сохранит силу и в общем случае нагружения при совмещении мгновенных направлений главных скоростей (направлений главных приращений деформаций) с подвижной системой координат: X, Y, Z. В общем случае необходимые условия экстремума работы процесса деформации определятся подобием девиаторов напряжений и приращений деформаций (скоростей деформаций — как это принимается теорией течения). Для изотропного упругого тела рассмотренные условия определяют максимум прироста потенциала. Учет анизотропии связан с наложением дополнительных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ильюшин. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
2. В. В. Соколовский. Теория пластичности. ГИТТЛ, 1950.
3. Справочное руководство по машиностроению. Т. 1. (Математика). Под ред. Майзель В. М., 1937.
4. Г. А. Дощинский. О главных направлениях напряжений и деформаций. Изв. ТПИ, т. 157, 1970.