

**К ВОПРОСУ ОБ ИНДУКТИВНОСТИ РАССЕЙНИЯ  
ПРОВОДНИКА, НАХОДЯЩЕГОСЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ  
ПАЗУ**

В. А. ЛУКУТИН

(Представлена научным семинаром кафедры ТОЭ)

Определению индуктивности рассеяния прямолинейных проводников, расположенных в пазах прямоугольного сечения со стенками из ферромагнитных материалов, уделяется в отечественной и зарубежной литературе очень большое внимание [2]. Объясняется это тем, что подобная задача встречается при исследовании индуктивности рассеяния во вращающихся электрических машинах.

Известно, что вычисление индуктивностей, в том числе индуктивностей рассеяния, сводится либо к определению магнитного потока, сцепленного с проводником или их группой, либо к расчету магнитного поля. Воспользуемся вторым вариантом и будем находить функцию векторного магнитного потенциала в области паза. Для упрощения задачи примем обычные в таких случаях допущения: будем полагать равной бесконечности магнитную проницаемость ферромагнитной среды стенок паза и не будем принимать во внимание выпучивание магнитных силовых линий у его открытого края.

На рисунке показано сечение паза и его размеры, а также сечение прямоугольного проводника с постоянным током, создающим магнитное поле. Так как принято, что у края паза силовая линия совпадает с осью  $x$ , то можно построить зеркальное отображение области относительно этой оси с током противоположного направления (показано пунктиром). После такого построения получилась замкнутая прямоугольная область, ограниченная ферромагнитной средой. Для описания магнитного поля в двумерной области будем искать функцию векторного потенциала  $A(x, y)$ , имеющего только одну проекцию, совпадающую с направлением тока в проводнике. Магнитное поле будет удовлетворять уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu \hat{d}(x, y) \tag{1}$$

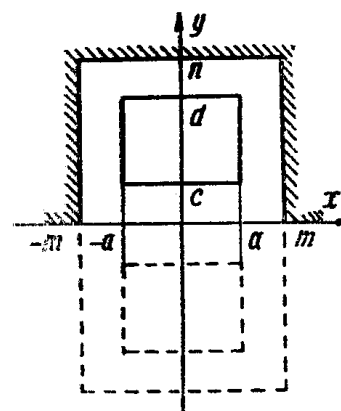


Рис. 1

при известных граничных условиях:

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = 0, \text{ при } y = \pm n, \quad (2)$$

$$B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = 0, \text{ при } x = \pm m, y = 0.$$

Рассматриваемая краевая задача (задача Неймана для уравнения Пуассона) будет решена, если удастся проинтегрировать уравнение (1). Однако можно воспользоваться и другой возможностью. Из теории вариационного исчисления известно, что интегрирование уравнения Пуассона эквивалентно нахождению экстремума функционала

$$J = \int_{-m}^m \int_{-n}^n \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 - 2\mu \delta A \right] dx dy. \quad (3)$$

Эту последнюю задачу мы решим методом Ритца. Выберем минимизирующую последовательность, учитывая симметрию по осям координат, в виде трех слагаемых

$$A(x, y) = D_1(3n^2y - y^3) + D_2y^3(n^2 - y^2)^2(m^2 - x^2)^2 + \quad (4) \\ + D_3(3n^2 - y^3)(m^2 - x^2)^2 = D_1\varphi_1 + D_2\varphi_2 + D_3\varphi_3.$$

Выбранное решение (4) удовлетворяет граничным условиям (2) и содержит неизвестные коэффициенты  $D_k$ . Для их вычисления составим систему уравнений Ритца:

$$D_1[\varphi_1, \varphi_1] + D_2[\varphi_1, \varphi_2] + D_3[\varphi_1, \varphi_3] = (\mu\delta, \varphi_1); \\ D_1[\varphi_2, \varphi_1] + D_2[\varphi_2, \varphi_2] + D_3[\varphi_2, \varphi_3] = (\mu\delta, \varphi_2); \quad (5) \\ D_1[\varphi_3, \varphi_1] + D_2[\varphi_3, \varphi_2] + D_3[\varphi_3, \varphi_3] = (\mu\delta, \varphi_3).$$

Здесь обозначено:

$$(\mu\delta, \varphi_k) = \int_{-m}^m \int_{-n}^n \mu\delta\varphi_k dx dy, \\ [\varphi_k, \varphi_p] = \int_{-m}^m \int_{-n}^n \left[ \frac{\partial\varphi_k}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi_p}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y} \frac{\partial\varphi_p}{\partial y} \right] dx dy. \quad (6)$$

Магнитное поле в исследуемой области создается постоянным током, поэтому плотность тока в проводнике можно определить по формуле

$$\delta = \frac{I}{2a(d-c)}.$$

Проделив операции (6) и решив в общем виде систему уравнений (5), получим формулы для подсчета коэффициентов. Промежуточные вычисления весьма громоздки, поэтому мы их опускаем и приводим здесь лишь конечные результаты:

$$D_1 = \frac{\mu I 10^{-3}}{m^3 n^7 z (d-c)} [13,35m^2 n^2 (1285m^4 + 1622m^2 n^2 + 74,4n^4) \Pi_1 + \\ + 51,1\Pi_2 - 5,81n^2 (257m^2 + 14n^2) \Pi_3];$$

$$D_2 = \frac{\mu_0 10^{-3}}{m^7 n^{13} z (d-c)} [4610 m^4 n^6 \Pi_1 + 738 (21 m^2 + 85 n^2) \Pi_2 - 89,7 n^4 (33 m^2 + 140 n^2) \Pi_3];$$

$$D_3 = \frac{\mu_0 10^{-3}}{m^7 n^9 z (d-c)} [-87,2 m^4 n^4 (257 m^2 + 14 n^2) \Pi_1 - 14,9 (33 m^2 + 140 n^2) \Pi_2 + 1,53 n^4 (1897 m^2 + 360 n^2) \Pi_3]; \quad (7)$$

$$z = 197,5 m^4 + 810 m^2 n^2 + 38 n^4;$$

$$\Pi_1 = 6 n^2 (d^2 - c^2) - (d^4 - c^4);$$

$$\Pi_2 = [15 m^4 - 10 m^2 a^2 + 3 a^2] [6 n^4 (d^4 - c^4) - 8 n^2 (d^6 - c^6) + 3 (d^8 - c^8)];$$

$$\Pi_3 = [15 m^4 - 10 m^2 a^2 + 3 a^2] \Pi_1.$$

Подставим определенные по (7) коэффициенты в выбранное решение (4) и получим аналитическое выражение векторной потенциальной функции в области паза.

Перейдем теперь непосредственно к определению индуктивности рассеяния проводника в пазу. Эта индуктивность определяется магнитным потоком, пересекающим паз от одной ферромагнитной стенки к другой и замыкающимся внутри самого проводника. Она определяется по найденной векторной потенциальной функции известной [2] формулой

$$L = \frac{1}{2a(d-c)I} \int_{-a}^a \int_c^d (A - A_0) dx dy. \quad (8)$$

Под знаком интеграла стоит  $A_0$  — векторный потенциал, определяющий начальную силовую линию. Здесь удобно принять за начальную линию ту, которая перекрывает паз у его края, т. е. совпадающую с осью  $x$ . Для этой линии  $A_0 = 0$ .

Подставим в (8) определенную выше функцию (4) и получим

$$L = \frac{\mu_0 10^{-3}}{4(d-c)^2 z} \left[ \frac{13,35}{m n^5} (1285 m^4 + 1622 m^2 n^2 + 74,4 n^4) \Pi_1^2 + \frac{8,2}{m^7 n^{13}} (21 m^2 + 85 n^2) \Pi_2^2 + \frac{1,02}{m^7 n^5} (189,7 m^2 + 36 n^2) \Pi_3^2 + \frac{102}{m^3 n^7} \Pi_1 \Pi_2 - \frac{11,6}{m^3 n^5} (257 m^2 + 14 n^2) \Pi_1 \Pi_3 - \frac{1,98}{m^7 n^9} (33 m^2 + 140 n^2) \Pi_2 \Pi_3 \right], \frac{2H}{m}. \quad (9)$$

В частном случае, когда паз полностью заполнен проводником из неферромагнитного материала, формула (9) значительно упрощается. Подставим в (9)  $m = a$ ,  $d = n$ ,  $c = 0$  и получим

$$L = \frac{\mu_0 n^2 (131 m^4 + 524 m^2 n^2 + 24,9 n^4)}{4 m^2 (197,5 m^4 + 180 m^2 n^2 + 38 n^4)}, \frac{2H}{m}. \quad (10)$$

### Выводы

1. Получено приближенное аналитическое выражение для функции векторного потенциала (4, 7). Оно удобно не только тем, что позволяет легко определить магнитную индукцию в любой точке области паза,

энергию магнитного поля в этой области, механические усилия, действующие на проводник с током, но и дает возможность исследовать влияние геометрических размеров паза и проводника на все перечисленные величины.

2. Аналитические приближенные формулы индуктивности рассеяния проводника в пазу (9, 10) весьма просты по форме, учитывают все размеры области проводника и позволяют оценить зависимость погонной индуктивности рассеяния от этих размеров.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Крылов, Л. В. Канторович. Приближенные методы анализа. М., Гостехиздат, 1952.

2. К. Бинс, П. Лауренсон. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. М., «Энергия», 1970.

3. П. Л. Калантаров, Л. А. Цейтлин. Расчет индуктивностей. М., «Энергия», 1970.

---