ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 210 1974

К ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. М. ОСИПОВ

(Представлена научным семинаром кафедры ТОЭ)

Параметрические системы, т. е. системы с периодически изменяющимися параметрами, обладают целым рядом особых свойств, техническое использование которых представляет значительный интерес. В связи с этим в последние годы внимание к ним заметно возросло. Однако значительные математические трудности, встречающиеся при исследовании параметрических систем, естественно, затрудняют их анализ и использование. Поэтому создание удобной инженерной методики расчета и анализа таких систем продолжает оставаться актуальной задачей. Ниже, на примере сложной электрической цепи с одним периодически изменяющимся параметром, излагается метод расчета параметрических систем, допускающий различные обобщения.

1. Постановка задачи

Пусть многоконтурная электрическая цепь в одном из контуров содержит периодически изменяющуюся индуктивность или емкость. Будем для простоты считать, что в том же контуре, начиная с момента $t=0$, действует напряжение $U(t)$. Выделим периодически изменяющийся элемент вместе с напряжением $U(t)$, а остальную часть цепи представим в виде пассивного двухполюсника.

Рассмотрим переходный процесс в этой цепи. В такой постановке задача была рассмотрена В. А. Тафтом (1958 г.), который дал по существу метод построения решения, основанный на применении интеграла Фурье и предусматривающий использование расчетного стола переменного тока [5, 6]. Ниже излагается метод аналитического решения задачи.

Будем предполагать, что

1. $U(t)$ — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty U(t)\,e^{-at}\,dt < \infty; \quad a \geqslant 0,$$

т. е. преобразование Лапласа этой функции существует.

2. Индуктивность (емкость) меняется по простому гармоническому закону:

$$L(t) = L_0\,[1 + m\cos(\Omega t + \alpha)], \tag{1,1}$$

где m — коэффициент модуляции ($m < 1$).

3. Пассивный двухполюсник удовлетворяет условиям физической реализуемости, т. е. входное операторное сопротивление двухполюсника $Z_{дв}(p)$ является положительной действительной функцией [2].

2. Интегральное уравнение цепи. Оператор сдвига

Поставленная задача сводится, очевидно, к интегрированию следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d\,[L(t)\cdot i(t)]}{dt} + U_{дв}(t) = U(t). \tag{2,1}$$

С учетом (1,1) уравнение приобретает вид

$$L_0\frac{di}{dt} + L_0 m\frac{d\,[i(t)\cos(\Omega t+\alpha)]}{dt} + U_{дв}(t) = U(t).$$

Преобразуя последнее уравнение по Лапласу, получим

$$pL_0 I(p) + \frac{m}{2}pL_0\,[I(p-j\Omega)\,e^{j\alpha} + I(p+j\Omega)\,e^{-j\alpha}] + $$
$$+ Z_{дв}(p)\,I(p) = U(p), \tag{2,2}$$

где

$$Z_{дв}(p)\,I(p) = U_{дв}(p).$$

Введем обозначения

$$y_0(p) = \frac{1}{pL_0 + Z_{дв}(p)}, \tag{2,3}$$

$$I_0(p) = U(p)\,y_0(p). \tag{2,4}$$

Будем иметь следующее соотношение:

$$I(p) = I_0(p) - \frac{m}{2}pL_0 y_0(p)\,[I(p-j\Omega)\,e^{j\alpha} + I(p+j\Omega)\,e^{-j\alpha}]. \tag{2,5}$$

Перейдем теперь к оригиналам. Прежде заметим, что операторной проводимости $y_0(p)$ соответствует импульсная характеристика исходной цепи при $m=0$, которую мы обозначим через $h(t)$, т. е.

$$y_0(p) = \int_0^\infty h(t)\,e^{-pt}\,dt. \tag{2,6}$$

Применяя теорему свертывания, найдем

$$i(t) = i_0(t) - m\frac{d}{dt}L_0\int_0^t h(t-x)\,i(x)\cos(\Omega x+\alpha)\,dx. \tag{2,7}$$

Приведем полученное интегральное уравнение к каноническому виду. Осуществляя дифференцирование, будем иметь

$$i(t) = i_0(t) - mL_0 h(0)\,i(t)\cos(\Omega t+\alpha) -$$
$$- mL_0\int_0^t h'(t-x)\,i(x)\cos(\Omega x+\alpha)\,dx.$$

После элементарных преобразований получим:

$$i(t) = f_0(t) - m\int_0^t K(t,x)\,i(x)\,dx, \tag{2,8}$$

где обозначено

$$f_0(t)=\frac{i_0(t)}{1+mL_0h(0)\cos(\Omega t+\alpha)}, \tag{2,9}$$

$$K(t,\,x)=\frac{L_0h'(t-x)\cos(\Omega x+\alpha)}{1+mL_0h(0)\cos(\Omega t+\alpha)}.$$

Мы пришли, таким образом, к интегральному уравнению Вольтерра второго рода со свободным членом $f_0\ (t)$ и ядром $K\ (t,\ x)$. Это уравнение, как известно, будет иметь одно и только одно непрерывное решение, если свободный член $f_0\ (t)$ и ядро $K\ (t,\ x)$ являются ограниченными и непрерывными функциями при $t>x$ [3]. Заметим, что решение будет единственным и при меньших ограничениях, а именно: достаточно потребовать квадратичную суммируемость $f_0\ (t)$ и $K\ (t,\ x)$ [4].

Покажем, что в нашем случае, при $m\leqslant 1$, как свободный член, так и ядро будут ограничены и непрерывны. Очевидно, функции $i_0\ (t)$ и $h'\ (t)$ непрерывны и ограничены, поэтому достаточно показать, что $L_0h\ (o)\leqslant 1$. Известно, что значение функции при $t=0$ равно значению ее изображения по Лапласу, умноженному на p при $p\to\infty$, т. е.

$$\lim_{p\to\infty}L_0p\,y_0(p)=L_0h(0).$$

Из (2,8) видно, что поведение $y_0(p)$ в бесконечно удаленной точке определяется поведением $Z_{дв}\ (p)$ при $p\to\infty$. Для физически реализуемых пассивных двухполюсников возможны два случая.

1. Бесконечно удаленная точка есть особая точка и, в частности, нуль, т. е.

$$\lim_{p\to\infty}Z_{дв}(p)=\text{const (или нуль)}$$

и, следовательно,

$$\lim pL_0y_0(p)=\lim\frac{pL_0}{pL_0+Z_{дв}(p)}=1=L_0h(0).$$

2. Бесконечно удаленная точка есть полюс, т. е.

$$\lim_{p\to\infty}Z_{дв}(p)=\infty,$$

причем для физически реализуемых двухполюсников порядок полюса не может быть больше единицы [2], т. е. стремление $Z_{дв}\ (p)$ к бесконечности будет присходить так же, как стремление к бесконечности выражения вида Lp, где L — некоторый положительный коэффициент. Имеем, следовательно:

$$\lim_{p\to\infty}pL_0y_0(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{pL_0}{pL_0+pL}=\frac{L_0}{L_0+L}<1.$$

Таким образом, для реальных двухполюсников справедливо неравенство

$$L_0h\ (0)\leqslant 1,$$

и следовательно, при $m\leqslant 1$ интегральное уравнение (2,8) или (2,7) имеет единственное решение.

Заметим, что во втором случае можно рассуждать иначе.

Представим $Z_{дв}\ (p)$ в виде суммы двух составляющих

$$Z_{дв}(p)=pL+Z'_{дв}(p),$$

причем $Z_{дв}\ (p)$ может иметь в бесконечности либо устранимую особую точку, либо нуль. Внесем операторное индуктивное сопротивление

pL в активный контур, тогда вместо pL_0 будем иметь $p(L+L_0)$. Коэффициент модуляции при этом изменится в $\frac{L_0}{L_0+L}$ раз и будет равен

$$m' = m\frac{L_0}{L_0+L}.$$

Будем, следовательно, иметь

$$\lim_{p\to\infty} p(L_0+L)y_0'(p) = \lim_{p\to\infty}\frac{p(L_0+L)}{p(L_0+L)+Z'_{\text{дв}}(p)} = 1 = (L_0+L)h(0).$$

Величина $mL_0h(0)$ остается неизменной, так как

$$m'(L_0+L)h(0) = mL_0h(0).$$

Поскольку в области изображений интегральному уравнению (2,7) соответствует операторное уравнение, то в силу единственности преобразования Лапласа последнее будет также иметь единственное решение. Прежде чем искать это решение, введем понятие об операторе сдвига. Смысл этого оператора определяется соотношением

$$I(p+j\Omega) = e^{j\Omega D}I(p), \tag{2,11}$$

которое формально возникает следующим образом. Разложение $I(p+j\Omega)$ в ряд Тейлора дает

$$I(p+j\Omega) = I(p) + \frac{dI(p)}{dp}j\Omega + \frac{d^2I(p)}{dp^2}\frac{(j\Omega)^2}{2!} + \cdots\cdots$$

Этот ряд сходится для всех точек области определения функции $I(p+j\Omega)$, несовпадающих с полюсами. Введем оператор дифференцирования по переменной p.

$$\frac{d}{dp} = D;\quad \frac{d^2}{dp^2} = D^2;\ \cdots\cdots \frac{d^n}{dp^n} = D^n.$$

Тогда

$$I(p+j\Omega) = \left[1 + \frac{j\Omega D}{1!} + \frac{(j\Omega D)^2}{2!} + \frac{(j\Omega D)^3}{3!} + \cdots\right]I(p),$$

т. е.

$$\begin{aligned} I(p+j\Omega) &= e^{j\Omega D}I(p),\\ I(p-j\Omega) &= e^{-j\Omega D}I(p), \end{aligned} \tag{2,12}$$

и основное свойство оператора сдвига состоит в следующем:

$$\begin{aligned} e^{\pm j\Omega D}[f(p)\cdot\varphi(p)] &= [e^{\pm j\Omega D}f(p)][e^{\pm j\Omega D}\varphi(p)] =\\ &= f(p\pm j\Omega)\cdot\varphi(p\pm j\Omega). \end{aligned} \tag{2,13}$$

Оператор действует при умножении слева. Другие свойства этого оператора формально совпадают со свойствами обычной показательной функции.

С помощью оператора сдвига уравнение (2,5), решение которого мы ищем, запишется следующим образом:

$$\left\{1 + \frac{m}{2}pL_0y_0(p)\left[e^{j(\Omega D-\alpha)} + e^{-j(\Omega D-\alpha)}\right]\right\}I(p) = I_0(p). \tag{2,14}$$

Обозначим

$$pL_0y_0(p) = N(p), \tag{2,15}$$

$$1 + \frac{m}{2}N(p)\left[e^{j(\Omega D-\alpha)} + e^{-j(\Omega D-\alpha)}\right] = B(p, D). \tag{2,16}$$

Последнее выражение будем рассматривать как некоторый обобщенный оператор, тогда наше уравнение символически запишется в виде

$$B(d, D)\, I(p) = I_0(p) = U(p)\, y_0(p). \tag{2,17}$$

3. Обратный оператор и его реализация

Формально решение уравнения (2,17) имеет вид

$$I(p) = B(p, D)^{-1}\, I_0(p), \tag{3,1}$$

где $B(p, D)^{-1}$ — оператор, обратный ранее введенному оператору $B(p, D)$. Очевидно,

$$B(p, D) \cdot B(p, D)^{-1} = 1. \tag{3,2}$$

Легко видеть, что

$$B(p, D)^{-1} = \frac{1}{1 + m\cos(\Omega D - \alpha)} = \frac{1}{B(p, D)}. \tag{3,3}$$

В такой форме, однако, использование обратного оператора затруднено, так как мы не знаем правила деления на обобщенный оператор. Необходимо представить его в форме, позволяющей осуществить реализацию.

Выражение (3,3) формально можно рассматривать как периодическую функцию аргумента $\Omega D - \alpha$, поэтому естественно искать представление обратного оператора в виде некоторого символического ряда Фурье, т. е.

$$B(p, D)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(p)\, e^{jn(\Omega D - \alpha)}, \tag{3,4}$$

где $F_n(p)$ — некоторые функции, подлежащие определению. Используя равенство (3,2), а также основное свойство оператора сдвига, получим

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(p)\, e^{jn(\Omega D-\alpha)} + \frac{m}{2} N(p) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(p + j\Omega)\, e^{j(n+1)(\Omega D-\alpha)} +$$

$$+ \frac{m}{2} N(p) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(p - j\Omega)\, e^{j(n-1)(\Omega D-\alpha)}. \tag{3,5}$$

Приравнивая коэффициенты при операторах сдвига одного порядка, будем иметь следующую систему рекуррентных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 = F_{-\kappa}(p) + \frac{m}{2} N(p)\, [F_{-(\kappa+1)}(p + j\Omega) + F_{-(\kappa-1)}(p - j\Omega)];\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 = F_{-1}(p) + \frac{m}{2} N(p)\, [F_{-2}(p + j\Omega) + F_0(p - j\Omega)],\\
&1 = F_0(p) + \frac{m}{2} N(p)\, [F_{-1}(p + j\Omega) + F_1(p - j\Omega)];\\
&0 = F_1(p) + \frac{m}{2} N(p)\, [F_0(p + j\Omega) + F_2(p - j\Omega)];\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 = F_{\kappa}(p) + \frac{m}{2} N(p)\, [F_{\kappa-1}(p + j\Omega) + F_{\kappa+1}(p - j\Omega)].
\end{aligned}\right\} \tag{3,6}$$

Прежде чем решать полученную систему, заметим следующее. В силу существования и единственности решения уравнения (2,18) обратный оператор имеет смысл и, следовательно, ряд (3,4) сходится, тогда

$$\lim_{n\to\infty} |F_n(p)| \to 0. \tag{3,7}$$

Если, начиная с некоторого достаточно большого n, пренебречь всеми функциями, то ошибка, допустимая при определении всех других функций с индексами, меньшими n, будет тем меньше, чем больше n.

Полагая $F_{\kappa+1}(p) \approx 0$, получим

$$F_\kappa(p) \approx -\frac{m}{2} N(p) F_{\kappa-1}(p+j\Omega). \tag{3,8}$$

Далее, имея в виду, что

$$0 = F_{\kappa-1}(p) + \frac{m}{2} N(p) [F_{\kappa-2}(p+j\Omega) + F_\kappa(p-j\Omega)],$$

и подставляя приближенное значение $F_\kappa(p)$, найдем

$$F_{\kappa-1}(p) \approx -\frac{\frac{m}{2} N(p) F_{\kappa-2}(p+j\Omega)}{1-\left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p) N(p-j\Omega)}. \tag{3,9}$$

Подставляя снова $F_{\kappa-1}(p)$ в рекуррентное соотношение

$$0 = F_{\kappa-2}(p) + \frac{m}{2} N(p) [F_{\kappa-3}(p+j\Omega) + F_{\kappa-1}(p-j\Omega)],$$

получим

$$F_{\kappa-2}(p) \approx -\frac{-\frac{m}{2} N(p) F_{\kappa-3}(p+j\Omega)}{1-\cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p) N(p-j\Omega)}{1-\left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p-j\Omega) N(p-j2\Omega)}}.$$

Продолжая этот процесс q раз, будем иметь

$$F_{\kappa-q}(p) \approx -\frac{\frac{m}{2} N(p) F_{\kappa-q-1}(p+j\Omega)}{1-\cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p) N(p-j\Omega)}{1-\cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p-j\Omega) N(p-j2\Omega)}{1-\cdots\cdots\cdots\cdots \atop \cfrac{\cdots\cdots\cdots\cdots}{1-\left(\frac{m}{2}\right)^2 N[p-j(q-1)\Omega] N(p-jq\Omega)}}}}. \tag{3,10}$$

Положим $q = \kappa - 1$, тогда

$$F_1(p) \approx \cfrac{-\frac{m}{2} N(p) F_0(p + j\Omega)}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p) N(p - j\Omega)}{1 - - - - - - - \cfrac{- - - - - - - - -}{1 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 N[p - j(\kappa - 2)\Omega]\, N[p - j(\kappa - 1)\Omega]}}}.$$

Устремляя теперь κ к бесконечности, мы получим точное значение $F_1(p)$, выраженное через $F_0(p + j\Omega)$

$$F_1(p) = -\frac{m}{2} N(p) A_1(p) F_0(p + j\Omega). \tag{3,11}$$

Через $A_1(p)$ обозначена бесконечная цепная дробь вида

$$A_1(p) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p) N(p - j\Omega)}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p - j\Omega) N(p - j2\Omega)}{1 -}}}. \tag{3,12}$$

Полагая $F_{-(\kappa+1)}(p) \approx 0$ и повторяя те же операции, получим

$$F_{-1}(p) = -\frac{m}{2} N(p) A_{-1}(p) F_0(p - j\Omega), \tag{3,13}$$

где

$$A_{-1}(p) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p) N(p + j\Omega)}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p + j\Omega) N(p + j2\Omega)}{1 -}}}. \tag{3,14}$$

Сходимость бесконечных цепных дробей (3, 12) и (3, 14) следует из доказанной ранее теоремы о существовании и единственности решения, однако тот же по существу результат можно получить и непосредственно.

Запишем цепную дробь (3, 12) в виде

$$A_1(p) = \frac{1}{1} + \frac{-\left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p) N(p - j\Omega)}{1} + \cdots$$

$$+ \cdots \frac{-\left(\frac{m}{2}\right)^2 N[p - j(\kappa - 1)\Omega]\, N(p - j\kappa\Omega)}{1} + \cdots.$$

Пусть $\lim\limits_{\kappa\to\pm\infty} N[p-j(\kappa-1)\Omega]\,N(p-j\kappa\Omega)=C$ для любого фиксированного p, тогда бесконечная цепная дробь сходится для любых m, за исключением значений, удовлетворяющих неравенству

$$-\infty\leqslant-\left(\frac{m}{2}\right)^2\leqslant-\frac{1}{4C}\,[7]$$

или

$$\infty>m>\frac{1}{\sqrt{C}}.$$

Найдем C:

$$\lim_{\kappa\to\pm\infty} N[p-j(\kappa-1)\Omega]\,N(p-j\kappa\Omega)=$$

$$=\lim_{\kappa\to\pm\infty}\frac{[p-j(\kappa-1)\Omega]\,L_0\cdot(p-j\kappa\Omega)\,L_0}{\{[p-j(\kappa-1)\Omega]\,L_0+Z_{дв}[p-j(\kappa-1)\Omega]\}\times\{(p-j\kappa\Omega)\,L_0+Z_{дв}(p-j\kappa\Omega)\}}=C.$$

Для фиксированных p при $\kappa\to\pm\infty$ $p-j\kappa\Omega\to\mp\infty$, но бесконечно удаленная точка для $Z_{дв}(j\kappa\Omega)$ есть либо устранимая особая точка, либо полюс первой кратности. В первом случае сразу получим $C=1$. Во втором случае, как было уже отмечено, положим $Z_{гв}(p)=Lp+Z'_{дв}(p)$, $(p\to j\kappa\Omega)$, где $Z'_{д}{}^{в}(j\kappa\Omega)$ может иметь лишь устранимую особую точку или нуль. Величину L можно рассматривать как некоторую индуктивность, которую мы можем вынести в активный контур и включить в L_0, следовательно, второй случай сводится к первому. Таким образом, сходимость наших цепных дробей обеспечена для любых m, удовлетворяющих неравенству

$$0\leqslant m\leqslant 1.$$

Из (3,11) и (3,13) следует:

$$F_1(p-j\Omega)=-\frac{m}{2}N(p-j\Omega)\,A_1(p-j\Omega)\,F_0(p),$$
$$F_{-1}(p+j\Omega)=-\frac{m}{2}N(p+j\Omega)\,A_{-1}(p+j\Omega)\,F_0(p).\qquad(3,15)$$

Подставляя эти выражения в единственное неоднородное уравнение системы (3, 6), найдем

$$F_0(p)=\frac{1}{1-\left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p)\,[A_{-1}(p+j\Omega)\,N(p+j\Omega)+A_1(p-j\Omega)\,N(p-j\Omega)]}.\qquad(3,16)$$

При помощи рекуррентного соотношения

$$0=F_\kappa(p)+\frac{m}{2}N(p)\,[F_{\kappa-1}(p+j\Omega)+F_{\kappa+1}(p-j\Omega)]$$

или

$$F_{\kappa+1}(p)=-\frac{F_\kappa(p+j\Omega)}{\frac{m}{2}N(p+j\Omega)}-F_{\kappa-1}(p+j2\Omega)\qquad(3,17)$$

мы можем выразить все неизвестные функции через известную $F_0(p)$. Для $F_1(p)$ и $F_{-1}(p)$ это уже сделано [формулы (3,11) и (3,13)]. Далее находим

$$F_2(p) = [A_1(p + j\Omega) - 1]\, F_0(p + j2\Omega), \tag{3,18}$$

$$F_3(p) = -\frac{\frac{m}{2} N(p + j2\Omega)\, [A_1(p + j\Omega) - 1]\, F_0(p + j3\Omega)}{1 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p + j\Omega)\, N(p + j2\Omega)\, A_1(p + j\Omega)}. \tag{3,19}$$

— —

Заметим, что если воспользоваться тождеством

$$A_1(p + j\Omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p)\, N(p + j\Omega)\, A_1(p)}, \tag{3,20}$$

справедливость которого проверить непосредственно, то можно убедиться в том, что

$$|F_\kappa(p)| \equiv \left(\frac{m}{2}\right)^\kappa.$$

Что касается функций с отрицательными индексами, то соответствующие формулы можно получить, заменяя в (3, 16), (3, 18), (3, 19) Ω на $-\Omega$ и $A_1(p)$ на $A_{-1}(p)$. Справедливы также следующие соотношения:

$$A_{-1}(p - j\Omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 N(p)\, N(p - j\Omega)\, A_{-1}(p)}. \tag{3,21}$$

Таким образом, искомое решение запишется в виде

$$I(p) = B(p, D)^{-1} I_0(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(p)\, e^{jn(\Omega D - \alpha)}\, I_0(p) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(p)\, I_0(p + jn\Omega)\, e^{-jn\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(p)\, y_0(p + jn\Omega)\, U(p + jn\Omega)\, e^{-jn\alpha} \approx$$

$$\approx \sum_{n=-q}^{q} F_n(p)\, y_0(p + jn\Omega)\, U(p + jn\Omega)\, e^{-jn\alpha}, \tag{3,22}$$

где q определяется требованием нужной точности. Поскольку при $n \to \pm\infty$

$$|y_0(p + jn\Omega)| \to 0,$$
$$|U(p + jn\Omega)| \to 0,$$

то абсолютные значения членов ряда (3,22) и соответствующих им функций времени убывают быстрее, чем $\left(\frac{m}{2}\right)^n$, причем тем быстрее, чем больше Ω и у́же полоса пропускания частотной характеристики.

4. Принужденная составляющая решения

Искомый ток как функция времени определится в результате обратного преобразования Лапласа (интеграл Бромвича)

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} I(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{4,1}$$

Согласно теореме о вычетах значение интеграла Бромвича равно сумме вычетов подынтегральной функции относительно всех полюсов, расположенных левее прямой $Re\,p = a$, если $t > 0$ [1], т. е.

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} I(p)\,e^{pt}\,dp = Res\,[I(p)\,e^{pt}]. \qquad (4,2)$$

Согласно (3,22)

$$I(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(p)\,y_0(p + jn\Omega)\,U(p + jn\Omega)\,e^{-jn\alpha} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(p)\,U(p + jn\Omega)\,e^{-jn\alpha}, \qquad (4,3)$$

где

$$G_n(p) = F_n(p)\,y_0(p + jn\Omega).$$

Эта функция характеризует динамические свойства самой рассматриваемой цепи и не зависит от вида приложенного напряжения. Пусть эта функция имеет полюса в точках $p = \lambda_i$ $(i = 1, 2, 3\ldots)$, причем $Re\lambda_i < a$ для любого i. Предположим также, что полюса функции $U(p + jn\Omega)$ располагаются в точках $p = p_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3\ldots)$, причем для реальных воздействий $Re\,p_\nu \leqslant 0 < a$ для любого ν.

Учитывая сказанное, можно написать

$$i(t) = \sum Res\,[I(p)\,e^{pt}] = \sum_{p=\lambda_i} Res\,[I(p)\,e^{pt}] +$$

$$+ \sum_{p=p_\nu} Res\,[I(p)\,e^{pt}] = i(t)_{\text{св}} + i(t)_{\text{пр}}. \qquad (4,4)$$

Здесь по аналогии с обычными линейными системами обозначено:

$$i(t)_{\text{св}} = \sum_{p=\lambda_i} Res\,[I(p)\,e^{pt}], \qquad (4,5)$$

$$i(t)_{\text{пр}} = \sum_{p=p_\nu} Res\,[I(p)\,e^{pt}], \qquad (4,6)$$

т. е. свободная составляющая тока равна сумме вычетов относительно всех полюсов функции $G_n(p)$, а принужденная — сумме вычетов относительно полюсов функции $U\ (p + jn\Omega)$. Следует, однако, подчеркнуть, что если для любой электрической цепи с постоянными параметрами свободная составляющая тока с течением времени затухает, стремясь к нулю, то в параметрических системах это может и не иметь места. В однажды возбужденной параметрической системе свободный процесс может даже нарастать, если энергия, генерируемая периодически изменяющейся индуктивностью, будет превышать потери в активных сопротивлениях [5, 6].

Рассмотрим подробнее принужденную составляющую, когда приложенное напряжение $U(t)$ есть периодическая функция с основной частотой ω. Этот случай является достаточно общим и представляет несомненный практический интерес.

Имеем

$$U(t) = \frac{U_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} U_m \cos(\nu\omega t + \beta_\nu) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \dot{U}_{m\nu}\,e^{j\nu\omega t}, \qquad (4,7)$$

где $\dot{U}_{m\nu} = \frac{1}{2} U_{m\nu} e^{j\beta_\nu}$ — комплексная амплитуда „ν"-й гармоники, причем $\beta_{-\nu} = \beta_\nu$; $\beta_0 = 0$, т. е.

$$\hat{U}_{m\nu} = \dot{U}_{m(-\nu)}; \quad \dot{U}_{m0} = \frac{1}{2} U_0.$$

Операторное изображение напряжения будет равно

$$U(p) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{U}_{m\nu}}{p - j\nu\omega} \tag{4,8}$$

и, следовательно,

$$U(p + jn\Omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{U}_{m\nu}}{p - j(\nu\omega - n\Omega)}. \tag{4,9}$$

Таким образом, полюса функции $U(p + jn\Omega)$ располагаются в точках $j(\nu\omega - n\Omega)$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, и принужденная составляющая будет равна

$$i(t)_{\text{пр}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F_n[j(\nu\omega - n\Omega)]\, y_0(j\nu\omega)\, \dot{U}_{m\nu} e^{j[(\nu\omega - n\Omega)t - n\alpha]}. \tag{4,10}$$

Введем обозначение

$$\dot{I}_{\nu n} = \dot{U}_{m\nu} F_n[j(\nu\omega - n\Omega)]\, y_0(j\nu\omega), \tag{4,11}$$

тогда

$$i(t)_{\text{пр}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \dot{I}_{\nu n} e^{j[(\nu\omega - n\Omega)t - n\alpha]}. \tag{4,12}$$

Практически в ряде (4,12) мы будем получать конечное число членов, так как частотная характеристика $G_n(j\omega)$ имеет конечную полосу пропускания и, кроме того, быстро убывает по абсолютной величине с ростом n.

Для нескольких начальных значений n комплексные амплитуды будут равны:

$$\dot{I}_{\nu 0} = F_0(j\nu\omega)\, y_0(j\nu\omega)\, \dot{U}_{m\nu} =$$

$$= \frac{y_0(j\nu\omega)\, \dot{U}_{m\nu}}{1 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 N(j\nu\omega)\,[A_{-1}(j\nu\omega + j\Omega)\, N(j\nu\omega + j\Omega) + A_1(j\nu\omega - j\Omega)\, N(j\nu\omega - j\Omega)]}, \tag{4,13}$$

$$\dot{I}_{\nu 1} = F_1(j\nu\omega - j\Omega)\, y_0(j\nu\omega)\, \dot{U}_{m\nu} =$$

$$= -\frac{m}{2} N(j\nu\omega - j\Omega)\, A_1(j\nu\omega - j\Omega)\, \dot{I}_{\nu 0}, \tag{4,14}$$

$$\dot{I}_{\nu 2} = F_2(j\nu\omega - j2\Omega)\, y_0(j\nu\omega)\, \dot{U}_{m\nu} =$$

$$= [A_1(j\nu\omega - j\Omega) - 1]\, F_0(j\nu\omega)\, y_0(j\nu\omega)\, \dot{U}_{m\nu} = [A_1(j\nu\omega - j\Omega) - 1]\, \dot{I}_{\nu 0}, \tag{4,15}$$

$$\dot{I}_{\nu 3} = F_3(j\nu\omega - j3\Omega)\, y_0(j\nu\omega)\, \dot{U}_{m\nu} =$$

$$= \frac{-\frac{m}{2} N(j\nu\omega - j\Omega)\,[A_1(j\nu\omega - j2\Omega) - 1]\, \dot{I}_{\nu 0}}{1 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 N(j\nu\omega - j2\Omega)\, N(j\nu\omega - j\Omega)\, A_1(j\nu\omega - j2\Omega)}. \tag{4,16}$$

По этим формулам комплексные амплитуды могут быть определены с любой точностью, если бесконечные цепные дроби заменить соответствующими подходящими дробями. Комплексные амплитуды для отрицательных n могут быть получены путем замены Ω на $-\Omega$ и A_1 на A_{-1}. Отметим некоторые важные частные случаи. При синусоидальном приложенном напряжении ($\nu = \pm 1$) будем иметь:

$$i(t)_{\text{пр}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\dot{I}_{1n} e^{j[(\omega-n\Omega)t-n\alpha]} + \dot{I}_{-1n} e^{-j[(\omega-n\Omega)t+n\alpha]}. \tag{4,17}$$

Особенность в этом случае будет состоять в том, что комплексные амплитуды $\dot{I}_{1n}$ и $\dot{I}_{-1(-n)}$, а также $\dot{I}_{1(-n)}$ и $\dot{I}_{-1n}$ будут образовывать пары комплексно-сопряженных величин. Если иметь в виду, что

$$\begin{aligned} \dot{I}_{1n} &= I_{1n} e^{j\varphi_n} = I_n e^{j\varphi_n} = \hat{I}_{-1(-n)}, \\ \dot{I}_{1(-n)} &= I_{1(-n)} e^{j\varphi_{-n}} = I_{-n} e^{j\varphi_{-n}} = \hat{I}_{-1n}, \end{aligned} \tag{4,18}$$

то можно написать вместо (4,17):

$$i(t)_{\text{пр}} = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cos[(\omega - n\Omega)t - n\alpha + \varphi_n]. \tag{4,19}$$

Случай постоянного приложенного напряжения получим при $\nu = 0$. В этом случае (4,12) преобразуется в обычный ряд Фурье:

$$i(t)_{\text{пр}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{I}_{0n} e^{-jn(\Omega t+\alpha)}, \tag{4,20}$$

причем формулы (4, 13) — (4, 16) существенно упростятся, так как

$$N(j\nu\omega)|_{\nu=0} = \frac{j\nu\omega L_0}{j\nu\omega L_0 + Z_{\text{дв}}(j\nu\omega)|_{\nu=0}} = j\nu\omega\, L_0\, y_0(j\nu\omega)|_{\nu=0} = 0,$$

поскольку для реальных двухполюсников $y_0(0) \neq 0$.
Таким образом, $N(0) = 0$

$$\dot{I}_{00} = y_0(0)\,\dot{U}_{m0} = y_0(0)\,\frac{U_0}{2}. \tag{4,21}$$

Наконец отметим частный случай, когда $m = 0$. В этом случае все параметры цепи постоянные и мы получаем известный результат.

$$i(t)_{\text{пр}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \dot{I}_{\nu 0} e^{j\nu\omega t}, \tag{4,22}$$

где

$$\dot{I}_{\nu 0} = \dot{U}_{m\nu}\, y_0(j\nu\omega).$$

Не представляет труда найти аналогичные соотношения для случая, когда вместо индуктивности последовательно с пассивным двухполюсником включена переменная емкость, изменяющаяся по простому гармоническому закону

$$C(t) = C_0[1 + m\cos(\Omega t + \alpha)]. \tag{4,23}$$

Полагая $U_c(0) = 0$, будем иметь

$$U(p) = U_c(p) + U_{\text{дв}}(p),$$

где $U(p)$ — операторное напряжение, приложенное к цепи. Имея в виду, что

$$\frac{d[C(t)\cdot U_c(t)]}{dt} \doteqdot I(p),$$

$$I(p) = pC_0 U_c(p) + \frac{m}{2} pC_0 [U_c(p + j\Omega) e^{-j\alpha} + U_c(p - j\Omega) e^{j\alpha}, \qquad (4,24)$$

получим после преобразований:

$$U_c(p) = U_0(p) - \frac{m}{2} M(p) [U_c(p + j\Omega) e^{-j\alpha} + U_c(p - j\Omega) e^{j\alpha}. \qquad (4,25)$$

Это уравнение для неизвестного напряжения на емкости $U_c\ (p)$.

$$\left.\begin{aligned} U_0(p) &= U(p) \frac{Y_{\text{дв}}(p)}{pC_0 + Y_{\text{дв}}(p)}, \\ M(p) &= \frac{pC_0}{pC_0 + Y_{\text{дв}}(p)} \ . \end{aligned}\right\} \qquad (4,26)$$

Решение уравнения (4,25) получается из (3,22), если сделать замену $I(p) \to U_c(p)$; $I_0(p) \to U_0(p)$; $N(p) \to M(p)$.

5. Случай $Z_{\text{дв}}(p) \equiv 0$

Это наиболее простой вариант рассматриваемой параметрической цепи. Он характеризуется тем, что дифференциальное уравнение (2,1) может быть непосредственно проинтегрировано и мы получим возможность проверить предлагаемую методику. Рассмотрим для простоты случай, когда $U(t)$ есть синусоидальная функция времени.

Имеем при $U_{\text{дв}}(t) = 0$

$$\frac{d[L(t)\cdot i(t)]}{dt} = U_m \sin(\omega t + \beta). \qquad (5,1)$$

Интегрируя и разрешая относительно искомого тока, получим

$$i(t) = -\frac{U_m}{\omega L_0} \cdot \frac{\cos(\omega t + \beta)}{1 + m\cos(\Omega t + \alpha)}. \qquad (5,2)$$

Постоянная интегрированная опущена, так как рассматривается установившийся режим.

Периодическую функцию

$$f(t) = \frac{1}{1 + m\cos(\Omega t + \alpha)}$$

разложим в ряд Фурье. Поскольку эта функция четная относительно аргумента $(\Omega t + \alpha)$, разложение будет содержать лишь косинусные члены. Коэффициенты Фурье будут равны

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d(\Omega t + \alpha)}{1 + m\cos(\Omega t + \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}, \qquad (5,3)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos n(\Omega t + \alpha)}{1 + m\cos(\Omega t + \alpha)} d(\Omega t + \alpha) = \frac{2}{\sqrt{1 - m^2}} \left[\frac{\sqrt{1 - m^2} - 1}{m}\right]^n. \qquad (5,4)$$

Таким образом,

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{1-m^2}}\left[\frac{\sqrt{1-m^2}-1}{m}\right]^n\cos n(\Omega t+\alpha). \quad (5{,}5)$$

Далее, имея в виду, что

$$i(t)=-\frac{U_m}{\omega L_0}f(t)\cos(\omega t+\beta)$$

и

$$\cos(\omega t+\beta)\cdot\cos n(\Omega t+\alpha)=\frac{1}{2}\{\cos[(\omega+n\Omega)t+n\alpha+\beta]+$$

$$+\cos[(\omega-n\Omega)t-n\alpha+\beta]\}=\frac{1}{4}\{e^{j[(\omega+n\Omega)t+n\alpha+\beta]}+$$

$$+e^{-j[(\omega+n\Omega)t+n\alpha+\beta]}+e^{j[(\omega-n\Omega)t-n\alpha-\beta]}+e^{-j[(\omega-n\Omega)t-n\alpha-\beta)]}\}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=\pm1}\{e^{j[(\omega-n\Omega)t-n\alpha+\beta]}+e^{-j[(\omega+n\Omega)t+n\alpha+\beta]}\},$$

окончательно получаем

$$i(t)=-\frac{1}{\omega L_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\left[\frac{\sqrt{1-m^2}-1}{m}\right]^{|n|}\Big\{\dot{U}_m e^{j[(\omega-n\Omega)t-n\alpha]}+$$

$$+\hat{U}_m e^{-j[(\omega+n\Omega)t+n\alpha]}\Big\}, \quad (5{,}6)$$

где

$$\dot{U}_m=\frac{1}{2}U_m e^{j\beta} \text{ и } \hat{U}_m=\frac{1}{2}U_m e^{-j\beta}.$$

Таким образом, мы привели (5,2) к виду (4,17)

$$i(i)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{\dot{I}_{1n}e^{j[(\omega-n\Omega)t-n\alpha]}+\dot{I}_{-1n}e^{-j[(\omega+n\Omega)t+n\alpha]}\}, \quad (5{,}7)$$

где

$$\dot{I}_{1(\pm n)}=-\frac{1}{2}\frac{U_m e^{j\beta}}{\omega L_0\sqrt{1-m^2}}\left[\frac{\sqrt{1-m^2}-1}{m}\right]^{|n|},$$

$$\dot{I}_{-1(\pm n)}=-\frac{1}{2}\frac{U_m e^{-j\beta}}{\omega L_0\sqrt{1-m^2}}\left[\frac{\sqrt{1-m^2}-1}{m}\right]^{|n|}. \quad (5{,}8)$$

Причем

$$\dot{I}_{1(\pm n)}=\hat{I}_{-1(\pm n)}.$$

Покажем, что тот же результат получается немедленно из наших общих формул (4,13)—(4,16).

Поскольку $Z_{дв}(p)=0$, то

$$N(p)=\frac{pL_0}{pL_0+Z_{дв}(p)}=1,$$

$$y_0(p)=\frac{1}{pL_0};\quad y_0(\pm j\omega)=\frac{1}{\pm j\omega}. \quad (5{,}9)$$

Цепные дроби (3, 12) и (3, 14) получают вид

$$A_1 = A_{-1} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2}{1 - - - - \\ - - - - - - .}}} \qquad (5,10)$$

Известно следующее разложение [7]:

$$\sqrt{x} = a + \cfrac{\frac{x-a^2}{2a}}{1 + \cfrac{\frac{x-a^2}{4a^2}}{1 + - - - - \\ - - - - ,}} \qquad (5,11)$$

где a — приближенное значение корня.

Положим $x = 1 - m^2$ и, следовательно, $a = 1$, тогда будем иметь

$$\sqrt{1-m^2} = 1 - \cfrac{\frac{m^2}{2}}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2}{1 - - - - - \\ - - - - - - ,}}} = 1 - \frac{m^2}{2} A_1 \qquad (5,12)$$

откуда

$$\frac{\sqrt{1-m^2} - 1}{m} = -\frac{m}{2} A_1 = -\cfrac{\frac{m}{2}}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2}{1 - \cfrac{\left(\frac{m}{2}\right)^2}{1 - - - - \\ - - - - .}}} \qquad (5,13)$$

Для применения наших формул (4, 13, 14 ....) необходимо положить

$$\beta_1 = \beta - \frac{\pi}{2},$$

тогда

$$\dot{U}_{m1} = \frac{1}{2} U_m e^{j\beta} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \frac{1}{2} U_m e^{j\beta},$$

$$\dot{U}_{m(-1)} = \frac{1}{2} U_m e^{-j\beta} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = j \frac{1}{2} U_m e^{-j\beta}. \qquad (5,14)$$

С учетом (5,9), (5,10), (5,13), (5,14) формула (4,13) дает

$$\dot{I}_{10} = -\frac{1}{2}\frac{U_m e^{j\beta}}{\omega L_0 \sqrt{1-m^2}} = \hat{I}_{-10}. \tag{5,15}$$

Далее находим из (4,14)

$$\dot{I}_{11} = -\frac{m}{2} A_1 \dot{I}_{10} = -\frac{1}{2}\frac{U_m e^{j\beta}}{\omega L_0 \sqrt{1-m^2}} \left[\frac{\sqrt{1-m^2}-1}{m}\right] = \hat{I}_{-11}. \tag{5,16}$$

Имея в виду, что $A_1 = \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{m}{2}\right)^2 A_1}$, получаем из (4,15)

$$\dot{I}_{12} = \frac{\left(\dfrac{m}{2}\right)^2 A_1}{1-\left(\dfrac{m}{2}\right)^2 A_1} \dot{I}_{10} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{U_m e^{j\beta}}{\omega L_0 \sqrt{1-m^2}} \left[\frac{\sqrt{1-m^2}-1}{m}\right]^2 = \hat{I}_{-12}. \tag{5,17}$$

И вообще таким путем можно убедиться, что для $\dot{I}_{1n}$ и $\dot{I}_{-1n}$ мы получаем формулы (5,8), т. е. результат, найденный нами путем непосредственного интегрирования дифференциального уравнения для рассматриваемого частного случая.

Заключение

В настоящей статье рассматривается методика аналитического расчета принужденной составляющей тока в параметрической цепи частного вида. Эта методика с успехом может быть использована и для решения более сложных задач, а также для расчета переходных процессов в параметрических системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 1964.
2. Г. И. Атабеков. Теория линейных электрических цепей. М., «Советское радио», 1959.
3. У. В. Ловитт. Линейные интегральные уравнения. Государственное издательство технико-теоретической литературы. М., 1959.
4. С. Г. Михлин. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.
5. В. А. Тафт. Электрические цепи с периодически изменяющимися параметрами и переходные процессы в синхронных машинах. М., Изд-во АН СССР, 1958.
6. В. А. Тафт. Вопросы теории электрических цепей с переменными параметрами и синтез цифровых и импульсных автоматических регуляторов. М., Изд-во АН СССР, 1960.
7. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщение к вопросам приближенного анализа. М., Гостехтеориздат, 1956.