ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 210 1974

К ВОПРОСУ О СООТНОШЕНИИ «ВХОД — ВЫХОД» ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В. М. ОСИПОВ

(Представлена научно-техническим семинаром автоматики и телемеханики)

Пусть M означает множество входных сигналов, действующих на некоторую линейную динамическую систему, а M' есть множество выходных сигналов. Задать соотношение «вход — выход», значит задать оператор A, реализующий закон, в силу которого каждому элементу множества M ставится в соответствие единственный элемент множества M'. Другими словами оператор A отображает множество M на множество M'.

Если $x(t) \in M$, а $y(t) \in M'$, то символически соотношение «вход — выход» записывается формулой

$$y(t) = A \cdot x(t). \tag{1}$$

Для линейных динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, оператор A при нулевых начальных условиях получает следующий вид:

$$y(t) = \int_0^\infty \kappa(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

где $\kappa(t_1\tau)$ — весовая функция, или импульсная переходная характеристика системы, причем $\kappa(t_1\tau) \equiv 0$ при $\tau > t$. Если система стационарна, то интегральный линейный оператор (2) преобразуется в интеграл свертки:

$$y(t) = \int_0^t \kappa(t - \tau)\, x(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty \kappa(t - \tau)\, x(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

В области операторных изображений последнему равенству соответствует выражение

$$F_y(p) = W(p) \cdot F_x(p), \tag{4}$$

где $F_x(p)$ и $F_y(p)$ есть преобразованные по Лапласу входной и выходной сигналы,

а $W(p)$ — передаточная функция системы, т. е. результат преобразования по Лапласу весовой функции

$$W(p) = \int_0^\infty \kappa(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{5}$$

Все рассмотренные нами соотношения связывают непосредственно заданные входные и выходные сигналы или их изображения по Лапласу. Возможен, однако, принципиально иной подход к этому вопросу. Он основан на векторном изображении реальных сигналов как функций времени [1]. Метод изображающих векторов позволяет получить связь «вход — выход» для линейной динамической системы в форме векторно-матричного соотношения:

$$Y = A \cdot X, \tag{6}$$

где X, $У$ — изображающие векторы входного и выходного сигналов соответственно. Координаты этих векторов есть коэффициенты Фурье разложений реальных сигналов в ряды по ортогональной системе функций либо значения разлагаемых функций в дискретном ряде точек. В качестве ортогональной системы функций целесообразно использовать полиномы Чебышева [1, 4].

Займемся определением матричного оператора A в (6) для стационарной линейной системы, которая описывается дифференциальным уравнением вида $(n > m)$:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_0 x. \tag{7}$$

Для простоты будем предполагать, что начальные условия нулевые. Будем считать также, что система устойчива и, следовательно, можно указать такой интервал $(0,t_0)$, за которым свободная составляющая переходного процесса практически исчезает. Вводим новую переменную $\tau = t/t_0$ и все процессы будем рассматривать на интервале $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$, полагая $y(t) = y(t_0\tau) = y(\tau)$ и $x(t) = x(t_0\tau) = x(\tau)$, а также имея в виду, что

$$dt^\kappa = t_0^\kappa d\tau^\kappa \text{ и}$$

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{\kappa} \varphi(t)\, dt^\kappa = t_0^\kappa \underbrace{\int_0^\tau \cdots \int_0^\tau}_{\kappa} \varphi(\tau)\, d\tau^\kappa.$$

Проинтегрируем обе части уравнения (7) n раз. Учитывая приведенные соотношения, связанные с заменой переменного, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} & y(\tau) + a_{n-1}t_0\int_0^\tau y(\tau)\,d\tau + \cdots + a_0 t_0^n \underbrace{\int_0^\tau \cdots \int_0^\tau}_{n} y(\tau)\,d\tau^n = \\ & = b_m t_0^{n-m}\underbrace{\int_0^\tau \cdots \int_0^\tau}_{n-m} x(\tau)\,d\tau^{n-m} + \cdots + b_0 t_0^n \underbrace{\int_0^\tau \cdots \int_0^\tau}_{n} x(\tau)\,d\tau^n. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Перейдем к изображающим векторам. По теореме об изображении интеграла [1] можем написать:

$$\int_0^\tau \cdots \int_0^\tau \varphi(\tau)\,d\tau^\kappa \to J^\kappa \cdot \varphi, \tag{9}$$

где φ — изображающий вектор функции $\varphi(\tau)$,
а J — матрица интегрирования вида

$$
J=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}
2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{8} & -\dots & -\frac{2\sqrt{2}}{\kappa(\kappa-2)} & \dots \\
-\sqrt{2} & 0 & 1 & & & & \\
 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & -\frac{1}{\kappa-2} & 0 & \frac{1}{\kappa-2} & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{bmatrix}. \quad (10)
$$

Таким образом, для изображений получим

$$
[E+a_{n-1}(t_0J)+\dots+a_1(t_0J)^{n-1}+a_0(t_0J)^n]\,Y=
$$
$$
=(t_0J)^{n-m}[b_0E+\dots+b_1(t_0J)^{m-1}+b_0(t_0J)^m]\,X,
$$

откуда формально найдем

$$
Y=\frac{(t_0J)^{n-m}[b_mE+\dots+b_0(t_0J)^m]}{E+a_{n-1}(t_0J)+\dots+a_0(t_0J)^n}\,X, \quad (11)
$$

где E — единичная матрица.

Таким образом, искомый матричный оператор имеет вид

$$
A=\frac{(t_0J)^{n-m}[b_mE+\dots+b_0(t_0J)^m]}{E+a_{n-1}(t_0J)+\dots+a_0(t_0J)^n}=
$$
$$
=[E+a_{n-1}(t_0J)+\dots+a_0(t_0J)^n]^{-1}[b_mE+\dots+b_m(t_0J)^m](t_0J)^{n-m}. \quad (12)
$$

Покажем, что структура матричного оператора (12), записанного в виде дроби, полностью совпадает со структурой так называемой инверсной передаточной функции рассматриваемой динамической системы. Передаточная функция равна

$$
W(p)=\frac{b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\dots+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\dots+a_1p+a_0}\quad n>m. \quad (13)
$$

Выполним дробно-линейное преобразование комплексной переменной p по формуле $p=\frac{1}{Z}$, в результате бесконечно удаленная точка плоскости p перейдет в начало координат плоскости z и наоборот.

Функцию

$$
W^*(z)=W\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{z^{n-m}(b_m+\dots+b_0z^m)}{1+a_{n-1}z+\dots+a_0z^n} \quad (14)
$$

будем называть инверсной передаточной функцией. Легко видеть, что если вместо z в (14) подставить матрицу t_0J, то получим матричный оператор (12), т. е.

$$
A=W^*(t_0J). \quad (15)
$$

Таким образом, связь «вход — выход» для линейных стационарных систем со сосредоточенными параметрами, в смысле метода изображающих векторов, определяется соотношением

$$
Y=W^*(t_0J)\cdot X. \quad (16)
$$

Матрицу $W^*(t_0I)$ будем называть матрицей преобразования линейной динамической системы. Она играет такую же роль, что и передаточная функция в операторном соотношении (4). Отсюда следует, что все правила преобразования структурных схем сохраняют силу при замене передаточных функций звеньев их матрицами преобразования, а сигналов — соответствующими векторами. Ненулевые начальные условия в рассматриваемом методе легко могут быть учтены путем инверсии соответствующего операторного выражения, составленного с учетом начальных условий.

Сделаем еще одно замечание. При выводе основного соотношения (16) использовалась многократно лишь одна операция интегрирования, поэтому следует ожидать высокую устойчивость метода к погрешностям исходных данных. Наконец, отметим важное свойство рассматриваемого представления, позволяющее весьма просто оценить перерегулирование — важнейшую характеристику качества переходного процесса. Пространство изображающих векторов l^2 изометрично гильбертову пространству L_h^2 (0,1), т. е.

$$\| y \|^2 = \int_0^1 h(\tau)\, y^2(\tau)\, d\tau = \| Y \|^2 = (Y, Y). \tag{17}$$

Поэтому согласно [2] можно написать

$$\| y \| = \sqrt{(Y, Y)} \leqslant \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} | y(\tau) |. \tag{18}$$

Если $y(\tau)$ — переходная характеристика, то перерегулирование имеет оценку снизу

$$\sigma\,\% \geqslant \frac{\sqrt{(Y, Y)} - y(t_0)}{y(t_0)}\, 100.$$

Поскольку

$$y(t_0) \approx \lim_{t \to \infty} y(t) = W(0),$$

$$(Y, Y) \approx \sum_{\kappa=0}^{m-1} y_\kappa^2,$$

где $W(0)$ — значение передаточной функции системы при $p = 0$, а y_κ ($\kappa = 0, 1, \cdots m-1$) — координаты изображающего вектора Y, т. е. коэффициенты Фурье переходной характеристики в разложении по полиномам Чебышева I рода, окончательно будем иметь

$$\sigma\% \geqslant \frac{\sqrt{\sum\limits_{1}^{m-1} y_\kappa^2} - W(0)}{W(0)}\, 100. \tag{19}$$

Сделаем замечание относительно выбора величины t_0. Если a есть абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня характеристического уравнения системы, то

$$t_0 \approx \frac{3 \div 4}{a}.$$

Величину a можно определить по способу, указанному в [3].

Рассмотрим пример. Система состоит из двух параллельно соединенных звеньев с суммарной передаточной функцией

$$W(p) = \frac{6p}{(p+1)^2 + 9} + \frac{9}{4\left(p + \dfrac{3}{2}\right)}. \tag{20}$$

Произведем расчет переходной характеристики системы по предлагаемому методу и проверим формулу (19). Точное выражение для переходной характеристики имеет вид

$$y(t) = 2e^{-t}\sin 3t + \frac{3}{2}\left(1 - e^{-\frac{3}{2}t}\right). \tag{21}$$

Найдем инверсную передаточную функцию

$$W^*(z) = \frac{6z}{(1+z)^2 + 9z^2} + \frac{9z}{4\left(1 + \frac{3}{2}z\right)}.$$

Величина a равна единице. Учитывая значительную колебательность процесса, принимаем $t_0 = 4$ *сек*. Матрицу интегрирования, как это следует из формулы (10), представим в виде $J = \frac{1}{4}J_1$,

поэтому

$$t_0 J = 4J = J_1.$$

Матрица преобразования равна

$$W^*(t_0 J) = W^*(J_1) = [E + 2J_1 + 10J_1^2]^{-1} 6J_1 + \frac{9}{4}\left[E + \frac{3}{2}J_1\right]^{-1} J_1.$$

Поскольку

$$x(t) = 1(t) \to \sqrt{2}e_1 = \sqrt{2}\,(1,\ 0,\ 0, \cdots 0, \cdots),$$

получим следующее выражение для изображающего вектора переходной характеристики:

$$Y = W^*(J_1)\sqrt{2}e_1 = [E + 2J_1 + 10J_1^2]^{-1}\, 12\eta + \frac{9}{2}\left[E + \frac{3}{2}J_1\right]^{-1}\eta,$$

где

$$\eta = \frac{1}{2}J_1\sqrt{2}e_1 = (\sqrt{2},\ -1,\ 0,\ 0, \cdots 0, \cdots).$$

Для матрицы J_1 порядка 8×8 расчеты дают:

$$Y_1 = [E + 2J_1 + 10J_1^2]^{-1} \cdot 12\eta = [0{,}262;\ 0{,}345;\ 0{,}179;\ -0{,}03;$$
$$-0{,}275;\ -0{,}372;\ -0{,}134;\ 0{,}067];$$

$$Y_2 = \frac{9}{2}\left(E + \frac{3}{2}J_1\right)^{-1}\eta = [1{,}612;\ -0{,}59;\ -0{,}335;\ -0{,}157;\ -0{,}048;$$
$$-0{,}014;\ -0{,}003;\ -0{,}0006];$$

$$Y = Y_1 + Y_2 = [1{,}874;\ -0{,}245;\ -0{,}156;\ -0{,}187;\ -0{,}323;$$
$$-0{,}386;\ -0{,}137;\ 0{,}066].$$

Точечный изображающий вектор определится формулой [1]

$$Y^T = I \cdot Y,$$

где I — интерполяционная матрица.

Координаты вектора Y^T есть значения переходной характеристики $y(t) = y(t_0\tau) = y(\tau)$ в нулях полинома $T_8^*(\tau)$. Результаты расчета приведены в таблице. В последней строке показаны точные значения $y(t)$ в узлах интерполирования, подсчитанные по выражению (21).

Как и следовало ожидать (таково свойство весовой функции Чебышева), заметны различия в средине интервала, однако нигде относительная ошибка не превосходит 3%, что вполне приемлемо для инженерных целей.

Таблица

$t_i = 4\tau_i$	0,0384	0,3370	0,8888	1,6098	2,3901	3,1111	3,6629	3,9615
$y^{т}$	0,305	1,796	1,479	0,928	1,618	1,453	1,446	1,5
$y(t_i)$	0,305	1,801	1,455	0 950	1,580	1,462	1,442	1,5

Если же учесть сложный характер искомой кривой (на рассматриваемом интервале кривая совершает четыре колебания около установившегося значения), то точность приближения восемью членами разложения по полиномам Чебышева 1 рода следует считать высокой. Проверим формулу (19).

Имеем

$$\|Y\| = \sqrt{\sum_{\kappa=0}^{7} y_\kappa^2} = \sqrt{3{,}9} = 1{,}97.$$

Максимум $y(t)$ равен 2 и достигается при $t = 0{,}509$, поэтому неравенство (18) в данном случае оказывается почти равенством. Оценка (19) дает $\sigma > 31{,}4\%$ $(\sigma = 33{,}3\%)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Осипов. Основы метода изображающих векторов и линейное преобразование сигналов. Вопросы программирования и автоматизации проектирования Сб. статей. Томск, Изд-во Томского госуниверситета, 1971.
2. В. М. Осипов. К вопросу о выборе оптимизирующего функционала. Приборостроение. Сборник научных трудов Пермского политехнического института, № 74. Пермь, 1969.
3. В. М. Осипов. К вопросу о приближенном обращении преобразования Лапласа. Изв. ТПИ, т. 191, Изд-во Томского госуниверситета, 1969.
4. Таблицы полиномов Чебышева S_n и (x) C_n (x). М., ВЦ АН СССР, 1963.