

## АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ФЕРРОРЕЗОНАНСНОМ ДИССИПАТИВНОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

А. И. КУТЯВИН

(Представлена научным семинаром кафедры ТОЭ)

I. При рассмотрении процессов в диссипативном феррорезонансном контуре, как известно, необходим учет потерь в стали. В этом случае при наличии постоянного подмагничивания определение областей существования релейных характеристик различного вида затрудняется и практически возможно только после численного решения задачи. Между тем, базируясь на теории ветвления решений нелинейных уравнений [1], можно найти их, не прибегая к численному решению всей задачи. Согласно этой теории уравнение может иметь более одного решения, если в задаче о неявных функциях частная производная или якобиан обращается в нуль в соответствующей точке, что справедливо на границе устойчивости [2]. На границе устойчивости уравнение системы может быть заменено уравнениями разветвления, которые

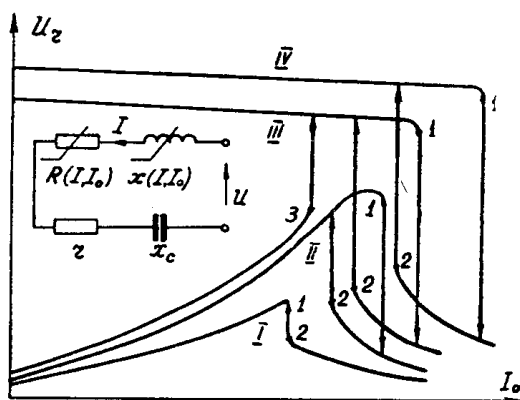


Рис. 1. Схема замещения контура и резонансные характеристики при изменении постоянного подмагничивания и фиксированных напряжений питания

значительно проще позволяют получить области существования релейных характеристик, чем исходное уравнение.

Целью данной работы является анализ стационарных процессов в диссипативном феррорезонансном контуре по предлагаемой методике квадратичной формы, которая базируется на теории ветвления. Прежде чем переходить к ней, выясним соотношения, вытекающие из уравнений гармонического и энергетического баланса при работе контура в точках релейных эффектов.

II. Рассмотрим схему замещения феррорезонансного контура (рис. 1), считая, что основная гармоника не может протекать по цепи постоянного подмагничивания. Уравнение гармонического баланса тогда примет вид

$$(-U_L + U_C)^2 + (U_R + U_i)^2 = U^2. \quad (1)$$

Условием существования релейных эффектов является равенство  $\frac{\partial U}{\partial I} = 0$ , что вытекает из критерия Раусса—Гурвица [2], то есть

$$(-x + x_c)(-x_d + x_c) + R_{\Sigma}R_{\Sigma d} = 0, \quad (2)$$

где  $R_{\Sigma} = R + r$ ,  $R_{\Sigma d} = R_d + r$ , а  $x$ ,  $x_d$  — статическое и дифференциальное индуктивные сопротивления дросселя;

$R, R_d$  — статическое и дифференциальное активные сопротивления дросселя, обусловленные потерями в стали;

$r$  — сопротивление нагрузки и меди дросселя. Если разрешить равенство (2) относительно  $x_c$ , то мы получим уравнение, определяющее геометрическое место точек, где начинаются скачкообразные изменения тока [4]:

$$x_c = 0,5(x + x_d) \pm \sqrt{0,25(x - x_d)^2 - R_{\Sigma}R_{\Sigma d}}. \quad (3)$$

Критическое сопротивление нагрузки, незначительное увеличение которого приводит к отсутствию бистабельной зоны (релейных эффектов), можно найти из (3), принимая подкоренное выражение равным нулю

$$r_{кр} = \sqrt{0,25(R - R_d)^2 + (x - x_{скр})^2} - 0,5(R + R_d), \quad (4)$$

где  $x_{скр}$  — критическое емкостное сопротивление,

$$x_{скр} = 0,5(x + x_d). \quad (5)$$

Рассмотрение уравнения энергетического баланса не дает новой, дополнительной информации

$$(-Q_L + Q_C)^2 + P^2 = S^2. \quad (6)$$

Выражения (1—5) при анализе контура с симметричной нелинейной характеристикой позволяют получить параметры с допустимой для инженерной практики ошибкой [4], что частично согласуется с данными работы [3]. При наличии постоянного подмагничивания применение выражений (1—5) затруднено, поэтому для получения новой информации рассмотрим уравнение энергетического баланса как квадратичную форму.

III. Согласно [5] экстремальные значения квадратичной формы совпадают с корнями уравнения Лагранжа и могут быть получены без вычисления координат точек, в которых они достигаются. Но в случае канонического вида квадратичной формы корни непосредственно входят в (6), поэтому попытаемся заменить (6) другой квадратичной формой, более удобной для анализа. Будем исходить из того, что если две квадратичные формы имеют один и тот же инвариант (дискриминант), то их корни одинаковы, поэтому можно заменить выражение

$$Q = -Q_L + Q_C = \pm \sqrt{S^2 - P^2}$$

формальными уравнениями разветвления

$$\left. \begin{aligned} Q &= \lambda + S \\ f(\lambda, I) &= \lambda^2 + 2S\lambda + P^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Назовем  $\lambda = \psi(I_0)$  реакцией колебательного контура на управляющий сигнал, т. е. ток постоянного подмагничивания. Нас будут интересовать только те значения корней уравнения, при которых квадратичная форма достигает экстремумов. Можно выделить два случая: 1) выходной сигнал максимален, 2) условия, определяющие критические параметры системы, когда работа осуществляется на границе устойчивости.

1. Выходной сигнал в диссипативной системе принято считать максимальным при  $U = R_{\Sigma} I$ , то есть когда производная по управляющему сигналу обращается в нуль (рис. 1, кривая II). В силу того, что корни квадратного уравнения в (7) являются функцией управляющего сигнала, поведение системы будет, очевидно, характеризоваться равенствами

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= \lambda + S = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial I_0} &= (\lambda + S) \lambda' + P \frac{\partial U_R}{\partial I_0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Они свидетельствуют о том, что при достижении резонансной кривой максимума справедливо еще одно соотношение  $\frac{\partial U_R}{\partial I_0} = 0$ , которое

имеет место тогда, когда активная составляющая напряжения на дросселе, обусловленная потерями в стали, тоже экстремальна (рис. 2).

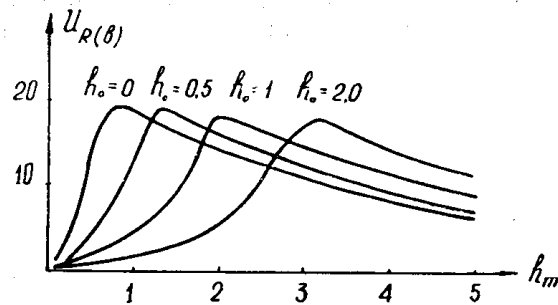


Рис. 2. Зависимость активной составляющей напряжения на дросселе при одновременном намагничивании постоянным и переменным полями

2. Критические параметры системы в общем случае будут зависеть от характера изменения активного сопротивления контура. Наибольший интерес представляют случаи, когда сопротивление постоянно, а также когда суммарное дифференциальное активное сопротивление может быть положительным или отрицательным. На границе устойчивости критические параметры бу-

дут, очевидно, определяться из выражения

$$\frac{\partial f}{\partial I} = 0, \text{ т. е. когда}$$

$$\lambda_1 = - \frac{R_{\Sigma} I^3 (R_{\Sigma d} + R_{\Sigma})}{U}. \quad (9)$$

В случае  $R_{\Sigma} = \text{const}$

$$\lambda_1 = - \frac{2R_{\Sigma}^2 I^3}{U}. \quad (10)$$

Подстановка (10) в квадратное уравнение дает  $P = \sqrt{0,75} S$ . Тогда  $\lambda_1 = -1,5 S$ ,  $Q = -0,5 S$ . По теореме Виетта корни приведенного квадратного уравнения связаны с его коэффициентом следующими соотношениями:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2S, \quad \lambda_1 \lambda_2 = P^2.$$

В результате решения для  $R_{\Sigma} = \text{const}$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} Q &= -0,5S = \lambda_2, \quad P = \sqrt{0,75} S = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \\ \text{и } \varphi &= \arctg \frac{-x + x_c}{R_{\Sigma}} = -\frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

При  $R_{\Sigma d} > 0$  из (2) и (5) получим, что  $R_{\Sigma} R_{\Sigma d} = (-x + x_{c \text{ кр}})^2$ . Тогда

$$\lambda_1 = -S, \quad Q = 0 \text{ и } \varphi = 0.$$

В случае, когда  $R_{\Sigma d} < 0$ ,  $(-x + x_c)(-x_d + x_c)$  должно быть больше нуля, что приводит к выражению

$$R_{\Sigma} R_{\Sigma d} = -(-x + x_{c \text{ кр}})^2. \quad (12)$$

Подставляя в квадратичное уравнение (7) и (9), а также (12), получим

$$S = \pm 2Q, \text{ тогда } P = \sqrt{0,75} S, \lambda_1 = -0,5 S. \quad (13)$$

Первое уравнение системы (7) при учете (13) позволяет определить характер реактивности цепи  $Q = 0,5 S$ .

Окончательно для  $R_{\Sigma d} < 0$  имеем

$$\left. \begin{aligned} Q = 0,5 S = |\lambda_1|, \lambda_2 = -1,5 S, \\ P = \sqrt{0,75} S = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Составляющие кажущейся мощности могут быть, очевидно, выражены через корни квадратного уравнения и по-другому, чем в (14)

$$Q = \sqrt{0,75} S, P = 0,5 S \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{3}. \quad (15)$$

IV. Для наиболее полного рассмотрения полученных выше выражений имеет смысл обратиться к экспериментальным данным. На рис. 2 показано изменение активной составляющей напряжения на дросселе при различном постоянном —  $h_0$  и переменном —  $h_m$  подмагничивании в относительных единицах. Как следует из рисунка, при  $h_m \simeq h_0$  дифференциальное сопротивление становится отрицательным. В зависимости от напряжения питания при изменении постоянного подмагничивания может быть несколько резонансных характеристик «вход—выход» (рис. 1), при этом

$$U_I < U_{II} < U_{III} < U_{IV}.$$

В точках 1 и 2 резонансных кривых реактивность контура обладает емкостным характером, в точке 3 — индуктивным. Данные по определению фазовых соотношений в этих точках от напряжения питания и сопротивления нагрузки приведены на рис. 3. Кривые  $\varphi = f(U)$  снимались при различных фиксированных значениях напряжения и изменении постоянного подмагничивания, т. е. по ним можно наблюдать как изменяется угол между током и питающим напряжением по мере увеличения последнего. При  $U \leq 7$  В резонансная кривая 1 (рис. 1) однозначна, а фазовые соотношения являются критическими, так как незначительное увеличение сопротивления нагрузки приводит к отсутствию релейных эффектов при данном напряжении.  $\varphi_3$  при  $U$ , равном 16 и 35 В, является тоже критическим. Кривые  $\varphi = f(r)$  снимались при  $U = \text{const}$  и изменении постоянного подмагничивания. При  $r = 122 \text{ Ом}$

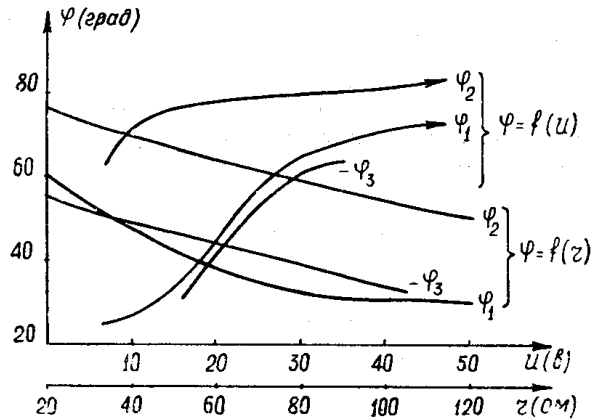


Рис. 3. Изменение фазовых соотношений от напряжения питания  $\varphi = f(U)$  и сопротивления  $\varphi = f(r)$ .

релейные эффекты в системе невозможны при данном напряжении питания.

Из приведенных рисунков, а также методики квадратичной формы следует, что критические фазовые соотношения можно считать постоянными и равными  $\simeq \frac{\pi}{6}$  и  $\simeq \frac{\pi}{3}$ . Минимальное изменение фазы при критической нагрузке составляет около  $30^\circ$  при неизменном характере реактивности цепи. В точке 3 резонансные кривые могут быть рассчитаны при условии, что  $R_z = \text{const}$ .

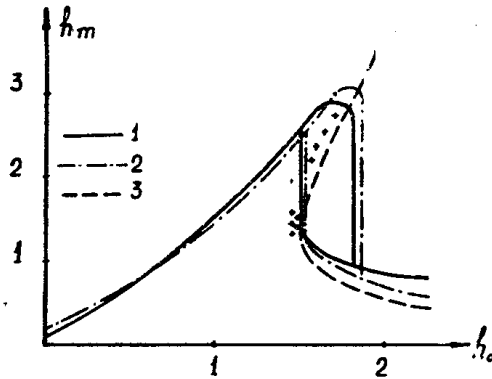


Рис. 4. Характеристика «вход—выход» вида усилитель—инвертор

при условии, что  $R_z = \text{const}$ . В точках 1 и 2 справедливы выражения (14) и (15), для чего необходимо иметь  $x_d < 0$ ,  $R_{zd} < 0$  и  $x < x_i$ . Наличие отрицательных дифференциальных сопротивлений возможно только в цепях при подмагничивании постоянным током.

Одной из основных трудностей при расчете резонансных кривых вида II (усилитель—инвертор) является «согласование» характеристик одновременного намагничивания  $U_L = f(I, I_0)$  и  $U_R = f(I, I_0)$ . Но согласно методике квадратичной формы рас-

четы в области возможных релейных эффектов могут проводиться при постоянных фазовых соотношениях, поэтому нет необходимости учитывать всегда  $U_R$ . Этот вопрос будет рассматриваться ниже.

V. Пусть требуется найти область существования характеристики контура вида «усилитель—инвертор» (рис. 4). При изменении индукции по закону  $B_{1,2} = \varepsilon H_i + \alpha \text{arctg } \beta H_i$ , где  $H_i = H_m \sin \omega t \pm H_0$  — напряженность поля в каждом из сердечников магнитного усилителя, уравнение гармонического баланса после нормирования примет вид:

$$(-A + ah_m)^2 + (\gamma h_m)^2 = E^2. \quad (16)$$

Здесь  $A$  — нормированная первая гармоника реактивной составляющей напряжения на дросселе, полученная в работе [6]:

$$A = \gamma h_m - \frac{2 - 2\sqrt{1 + 0,5(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4h_m^2})}}{h_m};$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{\alpha \beta}; \quad \gamma = h_m^2 - h_0^2 - 1, \quad h_n = \beta H_m, \quad h_0 = \beta H_0;$$

$$\alpha = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C}; \quad L_0 = \frac{2W^2 S}{l} \cdot 10^{-8} \alpha \beta;$$

$$\delta = \frac{R_z}{\omega L_0}; \quad E = \frac{\beta U_m}{\omega L_0} \cdot \frac{W}{l}; \quad R_z = R + r.$$

Активная составляющая напряжения на дросселе может быть определена только опытным путем и представлена эмпирически

$$U_R = \frac{h_m}{\kappa_1 h_m^2 + \kappa_2 h_m + \kappa_3},$$

где  $K_1 \dots K_3$  — полиномы третьей степени от напряженности постоянного поля.

Если выражение (16) записать в виде

$$-A + ah_m = \pm \sqrt{E^2 - (\delta h_m)^2},$$

то в левой части равенства удается разделить переменные и методом итерации найти зависимость  $h_0 = f(h_m, F, h_0)$

$$h_0 = \frac{F}{2} \sqrt{\frac{4h_m}{F^2 - 4} - 1}, \quad (17)$$

где  $F = \sqrt{h_m^2 + 2} \pm h_m \sqrt{E^2 - (\delta h_m)^2}$  — вспомогательная функция,  
 $v = a - \gamma$ .

Выражение (17) является основным уравнением характеристики «вход — выход» феррорезонансного контура при наличии постоянного подмагничивания. На рис. 4 представлена экспериментально снятая зависимость — кривая 1 и полученная численным решением задачи кривая 2, когда с точки зрения выбора величины напряжения питания характеристика оптимальна. При больших  $U$  возможен переход в зависимости вида III (рис. 1), при меньших — уменьшается реализуемый выходной сигнал. Как показывают экспериментальные данные, резонансные кривые достигают максимального значения при немного больших  $h_m$ , чем имеют магнитные усилители при том же  $U$  и  $h_0$ . Так как в режиме с подавленными четными гармониками в цепи управления для магнитного усилителя справедливо равенство намагничивающих сил в средних значениях, то выражение

$$h_m^2 - h_0^2 - 1 = \eta = 0, \quad (18)$$

очевидно, можно рассматривать как условие оптимальности. Оно должно вытекать и из выражения  $\frac{\partial U_R}{\partial I_0} = 0$ . Равенство (18) при  $E = \delta h_m$  позволяет найти максимальный выходной сигнал, если известна емкость

$$\sqrt{h_m^3 + 4} h_m - 4 = 0$$

или емкость при заданной напряженности переменного поля

$$C = \frac{h_m^2}{\omega^2 L_0 [\gamma \cdot h_m^2 + 2(-1 \pm \sqrt{1 + h_m})]}.$$

Для определения релейной характеристики воспользуемся методикой квадратичной формы. Пусть кривая 3 (рис. 4) построена по уравнению (17), когда вспомогательная функция

$$F = \sqrt{h_m^2 + 2} - 0,5 E h_m,$$

что равносильно выполнению тождества (14), или по-другому

$$(-U_L + U_C) = 0,5 U. \quad (19)$$

Кривая представляет собой геометрическое место точек скачкообразного изменения переменного тока при критической нагрузке. Тогда  $R_0$  при уменьшении тока в рабочей цепи можно определить, считая  $h_m$  равной максимальному выходному сигналу. При скачкообразном увеличении  $h_m$  выполняется помимо (14) еще и  $\frac{\partial h_0}{\partial h_m} = 0$ .

На рис. 4 представлены также экспериментальные точки срыва и возбуждения колебаний при различных нагрузочных сопротивлениях. Они свидетельствуют о том, что кривая, построенная по уравнению (19).

является «скелетной» кривой. Она позволяет определить все возможные резонансные явления при заданном напряжении и изменении нагрузки.

В заключение отметим, что материалы данной статьи докладывались в 1971 г. на IV Всесоюзной конференции по теории и методам расчета нелинейных электрических цепей (г. Ташкент).

### Выводы

1. Методика квадратичной формы, являясь одной из разновидностей теории ветвления, позволяет определить критические фазовые соотношения в последовательном феррорезонансном контуре.

2. Полученные фазовые соотношения являются постоянными, что значительно упрощает нахождение области существования релейных эффектов.

3. Подтверждается возможность получения удовлетворительных данных при определении резонансных кривых по основной гармонике.

### ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. «Наука», 1969.
  2. Т. Хаяси. Нелинейные колебания в физических системах. «Мир», 1968.
  3. С. Н. Гинзбург. Нелинейные цепи и их функциональные характеристики. ГЭИ, 1958.
  4. А. И. Кутявин. Расчет релейных эффектов в последовательной феррорезонансной цепи. Известия ТПИ, т. 244.
  5. Р. Беллман. Введение в теорию матриц. «Наука», 1969.
  6. Л. С. Гольдфарб, Г. Р. Герценберг. Определение гармоник тока и напряжения в электрических цепях, содержащих железо. «Электричество», 1938 № 1.
-