

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ФЕРРОРЕЗОНАНСНОМ ДИССИПАТИВНОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

А. И. КУТЯВИН

(Представлена научным семинаром кафедры ТОЭ)

1. При рассмотрении процессов в диссипативном феррорезонансном контуре, как известно, необходим учет потерь в стали. В этом случае при наличии постоянного подмагничивания определение областей существования релейных характеристик различного вида затрудняется и практически возможно только после численного решения задачи. Между тем, базируясь на теории ветвления решений нелинейных уравнений [1], можно найти их, не прибегая к численному решению всей задачи. Согласно этой теории уравнение может иметь более одного решения, если в задаче о неявных функциях частная производная или якобиан обращается в нуль в соответствующей точке, что справедливо на границе устойчивости [2]. На границе устойчивости уравнение системы может быть заменено уравнениями разветвления, которые

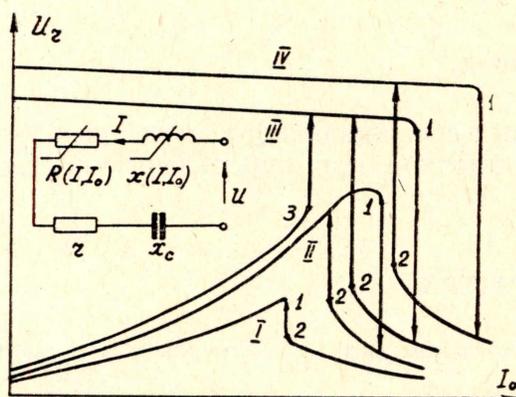


Рис. 1. Схема замещения контура и резонансные характеристики при изменении постоянного подмагничивания и фиксированных напряжений питания

значительно проще позволяют получить области существования релейных характеристик, чем исходное уравнение.

Целью данной работы является анализ стационарных процессов в диссипативном феррорезонансном контуре по предлагаемой методике квадратичной формы, которая базируется на теории ветвления. Прежде чем переходить к ней, выясним соотношения, вытекающие из уравнений гармонического и энергетического баланса при работе контура в точках релейных эффектов.

II. Рассмотрим схему замещения феррорезонансного контура (рис. 1), считая, что основная гармоника не может протекать по цепи постоянного подмагничивания. Уравнение гармонического баланса тогда примет вид

$$(-U_L + U_C)^2 + (U_R + U_I)^2 = U^2. \quad (1)$$

Условием существования релейных эффектов является равенство $\frac{\partial U}{\partial I} = 0$, что вытекает из критерия Раусса—Гурвица [2], то есть

$$(-x + x_c)(-x_d + x_c) + R_\Sigma R_{\Sigma d} = 0, \quad (2)$$

где $R_\Sigma = R + r$, $R_{\Sigma d} = R_d + r$, а x , x_d — статическое и дифференциальное индуктивные сопротивления дросселя;

R, R_d — статическое и дифференциальное активные сопротивления дросселя, обусловленные потерями в стали;

r — сопротивление нагрузки и меди дросселя. Если разрешить равенство (2) относительно x_c , то мы получим уравнение, определяющее геометрическое место точек, где начинаются скачкообразные изменения тока [4]:

$$x_c = 0,5(x + x_d) \pm \sqrt{0,25(x - x_d)^2 - R_\Sigma R_{\Sigma d}}. \quad (3)$$

Критическое сопротивление нагрузки, незначительное увеличение которого приводит к отсутствию бистабельной зоны (релейных эффектов), можно найти из (3), принимая подкоренное выражение равным нулю

$$r_{кр} = \sqrt{0,25(R - R_d)^2 + (x - x_{скр})^2} - 0,5(R + R_d), \quad (4)$$

где $x_{скр}$ — критическое емкостное сопротивление,

$$x_{скр} = 0,5(x + x_d). \quad (5)$$

Рассмотрение уравнения энергетического баланса не дает новой, дополнительной информации

$$(-Q_L + Q_C)^2 + P^2 = S^2. \quad (6)$$

Выражения (1—5) при анализе контура с симметричной нелинейной характеристикой позволяют получить параметры с допустимой для инженерной практики ошибкой [4], что частично согласуется с данными работы [3]. При наличии постоянного подмагничивания применение выражений (1—5) затруднено, поэтому для получения новой информации рассмотрим уравнение энергетического баланса как квадратичную форму.

III. Согласно [5] экстремальные значения квадратичной формы совпадают с корнями уравнения Лагранжа и могут быть получены без вычисления координат точек, в которых они достигаются. Но в случае канонического вида квадратичной формы корни непосредственно входят в (6), поэтому попытаемся заменить (6) другой квадратичной формой, более удобной для анализа. Будем исходить из того, что если две квадратичные формы имеют один и тот же инвариант (дискриминант), то их корни одинаковы, поэтому можно заменить выражение

$$Q = -Q_L + Q_C = \pm \sqrt{S^2 - P^2}$$

формальными уравнениями разветвления

$$\left. \begin{aligned} Q &= \lambda + S \\ f(\lambda, I) &= \lambda^2 + 2S\lambda + P^2 = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Назовем $\lambda = \psi(I_0)$ реакцией колебательного контура на управляющий сигнал, т. е. ток постоянного подмагничивания. Нас будут интересовать только те значения корней уравнения, при которых квадратичная форма достигает экстремумов. Можно выделить два случая: 1) выходной сигнал максимален, 2) условия, определяющие критические параметры системы, когда работа осуществляется на границе устойчивости.

1. Выходной сигнал в диссипативной системе принято считать максимальным при $U = R_{\Sigma} I$, то есть когда производная по управляющему сигналу обращается в нуль (рис. 1, кривая II). В силу того, что корни квадратичного уравнения в (7) являются функцией управляющего сигнала, поведение системы будет, очевидно, характеризоваться равенствами

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= \lambda + S = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial I_0} &= (\lambda + S) \lambda' + P \frac{\partial U_R}{\partial I_0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Они свидетельствуют о том, что при достижении резонансной кривой максимума справедливо еще одно соотношение $\frac{\partial U_R}{\partial I_0} = 0$, которое

имеет место тогда, когда активная составляющая напряжения на дросселе, обусловленная потерями в стали, тоже экстремальна (рис. 2).

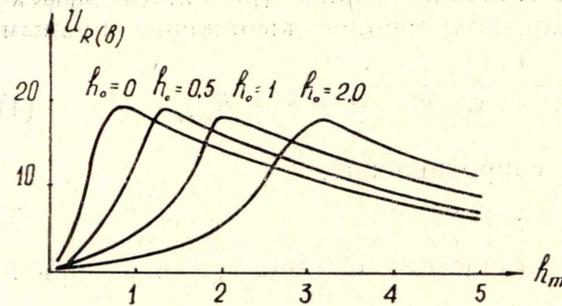


Рис. 2. Зависимость активной составляющей напряжения на дросселе при одновременном намагничивании постоянным и переменным полями

2. Критические параметры системы в общем случае будут зависеть от характера изменения активного сопротивления контура. Наибольший интерес представляют случаи, когда сопротивление постоянно, а также когда суммарное дифференциальное активное сопротивление может быть положительным или отрицательным. На границе устойчивости критические параметры бу-

дут, очевидно, определяться из выражения

$$\frac{\partial f}{\partial I} = 0, \text{ т. е. когда} \quad (9)$$

$$\lambda_1 = - \frac{R_{\Sigma} I^3 (R_{\Sigma d} + R_{\Sigma})}{U}.$$

В случае $R_{\Sigma} = \text{const}$

$$\lambda_1 = - \frac{2R_{\Sigma}^2 I^3}{U}. \quad (10)$$

Подстановка (10) в квадратное уравнение дает $P = \sqrt{0,75} S$. Тогда $\lambda_1 = -1,5S$, $Q = -0,5S$. По теореме Виетта корни приведенного квадратного уравнения связаны с его коэффициентом следующими соотношениями:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2S, \quad \lambda_1 \lambda_2 = P^2.$$

В результате решения для $R_{\Sigma} = \text{const}$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} Q = -0,5S = \lambda_2, \quad P = \sqrt{0,75} S = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \\ \text{и } \varphi = \arctg \frac{-x + x_c}{R_{\Sigma}} = -\frac{\pi}{6} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

При $R_{\Sigma d} > 0$ из (2) и (5) получим, что $R_{\Sigma} R_{\Sigma d} = (-x + x_{c \text{ кр}})^2$. Тогда

$$\lambda_1 = -S, \quad Q = 0 \text{ и } \varphi = 0.$$

В случае, когда $R_{\Sigma d} < 0$, $(-x + x_c)(-x_d + x_c)$ должно быть больше нуля, что приводит к выражению

$$R_{\Sigma} R_{\Sigma d} = -(-x + x_{c \text{ кр}})^2. \quad (12)$$

Подставляя в квадратичное уравнение (7) и (9), а также (12), получим

$$S = \pm 2Q, \text{ тогда } P = \sqrt{0,75} S, \lambda_1 = -0,5 S. \quad (13)$$

Первое уравнение системы (7) при учете (13) позволяет определить характер реактивности цепи $Q = 0,5 S$.

Окончательно для $R_{\Sigma d} < 0$ имеем

$$\left. \begin{aligned} Q = 0,5 S = |\lambda_1|, \lambda_2 = -1,5 S, \\ P = \sqrt{0,75} S = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Составляющие кажущейся мощности могут быть, очевидно, выражены через корни квадратного уравнения и по-другому, чем в (14)

$$Q = \sqrt{0,75} S, P = 0,5 S \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{3}. \quad (15)$$

IV. Для наиболее полного рассмотрения полученных выше выражений имеет смысл обратиться к экспериментальным данным. На рис. 2 показано изменение активной составляющей напряжения на дросселе при различном постоянном — h_0 и переменном — h_m подмагничивании в относительных единицах. Как следует из рисунка, при $h_m \simeq h_0$ дифференциальное сопротивление становится отрицательным. В зависимости от напряжения питания при изменении постоянного подмагничивания может быть несколько резонансных характеристик «вход—выход» (рис. 1), при этом

$$U_I < U_{II} < U_{III} < U_{IV}.$$

В точках 1 и 2 резонансных кривых реактивность контура обладает емкостным характером, в точке 3 — индуктивным. Данные по определению фазовых соотношений в этих точках от напряжения питания и сопротивления нагрузки приведены на рис. 3. Кривые $\varphi = f(U)$ снимались при различных фиксированных значениях напряжения и изменении постоянного подмагничивания, т. е. по ним можно наблюдать как изменяется угол между током и питающим напряжением по мере увеличения последнего. При $U \leq 7$ В резонансная кривая 1 (рис. 1) однозначна, а фазовые соотношения являются критическими, так как незначительное увеличение сопротивления нагрузки приводит к отсутствию релейных эффектов при данном напряжении. φ_3 при U , равном 16 и 35 В, является тоже критическим. Кривые $\varphi = f(r)$ снимались при $U = \text{const}$ и изменении постоянного подмагничивания. При $r = 122 \text{ Ом}$

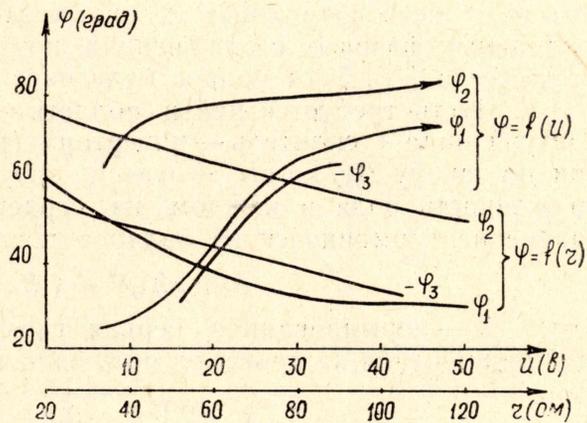


Рис. 3. Изменение фазовых соотношений от напряжения питания $\varphi = f(U)$ и сопротивления $\varphi = f(r)$.

релейные эффекты в системе невозможны при данном напряжении питания.

Из приведенных рисунков, а также методики квадратичной формы следует, что критические фазовые соотношения можно считать постоянными и равными $\simeq \frac{\pi}{6}$ и $\simeq \frac{\pi}{3}$. Минимальное изменение фазы при критической нагрузке составляет около 30° при неизменном характере реактивности цепи. В точке 3 резонансные кривые могут быть рассчитаны

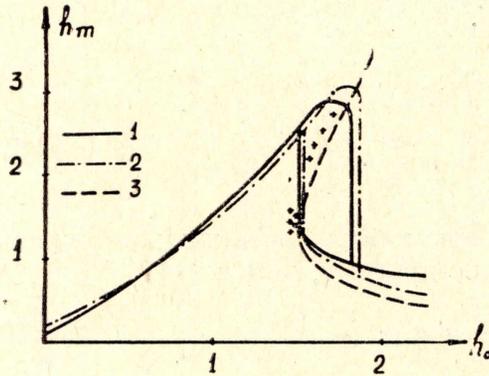


Рис. 4. Характеристика «вход—выход» вида усилитель—инвертор

при условии, что $R_{\Sigma} = \text{const}$. В точках 1 и 2 справедливы выражения (14) и (15), для чего необходимо иметь $x_d < 0$, $R_{\Sigma d} < 0$ и $x < x_c$. Наличие отрицательных дифференциальных сопротивлений возможно только в цепях при подмагничивании постоянным током.

Одной из основных трудностей при расчете резонансных кривых вида II (усилитель—инвертор) является «согласование» характеристик одновременного намагничивания $U_L = f(I, I_0)$ и $U_R = f(I, I_0)$. Но согласно методике квадратичной формы рас-

четы в области возможных релейных эффектов могут проводиться при постоянных фазовых соотношениях, поэтому нет необходимости учитывать всегда U_R . Этот вопрос будет рассматриваться ниже.

V. Пусть требуется найти область существования характеристики контура вида «усилитель—инвертор» (рис. 4). При изменении индукции по закону $B_{1,2} = \varepsilon H_i + \alpha \text{arctg } \beta H_i$, где $H_i = H_m \sin \omega t \pm H_0$ — напряженность поля в каждом из сердечников магнитного усилителя, уравнение гармонического баланса после нормирования примет вид:

$$(-A + ah_m)^2 + (\delta h_m)^2 = E^2. \quad (16)$$

Здесь A — нормированная первая гармоника реактивной составляющей напряжения на дросселе, полученная в работе [6]:

$$A = \gamma h_m - \frac{2 - 2\sqrt{1 + 0,5(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4h_m^2})}}{h_m};$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{\alpha \beta}; \quad \eta = h_m^2 - h_0^2 - 1, \quad h_n = \beta H_m, \quad h_0 = \beta H_0;$$

$$\alpha = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C}; \quad L_0 = \frac{2W^2 S}{l} \cdot 10^{-8} \alpha \beta;$$

$$\delta = \frac{R_{\Sigma}}{\omega L_0}; \quad E = \frac{\beta U_m}{\omega L_0} \cdot \frac{W}{l}; \quad R_{\Sigma} = R + r.$$

Активная составляющая напряжения на дросселе может быть определена только опытным путем и представлена эмпирически

$$U_R = \frac{h_m}{\kappa_1 h_m^2 + \kappa_2 h_m + \kappa_3},$$

где $K_1 \dots K_3$ — полиномы третьей степени от напряженности постоянного поля.

Если выражение (16) записать в виде

$$-A + ah_m = \pm \sqrt{E^2 - (\delta h_m)^2},$$

то в левой части равенства удается разделить переменные и методом итерации найти зависимость $h_0 = f(h_m, F, h_0)$

$$h_0 = \frac{F}{2} \sqrt{\frac{4h_m}{F^2 - 4} - 1}, \quad (17)$$

где $F = \sqrt{h_m^2 + 2} \pm h_m \sqrt{E^2 - (\delta h_m)^2}$ — вспомогательная функция,
 $\nu = a - \gamma$.

Выражение (17) является основным уравнением характеристики «вход — выход» феррорезонансного контура при наличии постоянного подмагничивания. На рис. 4 представлена экспериментально снятая зависимость — кривая 1 и полученная численным решением задачи кривая 2, когда с точки зрения выбора величины напряжения питания характеристика оптимальна. При больших U возможен переход в зависимости вида III (рис. 1), при меньших — уменьшается реализуемый выходной сигнал. Как показывают экспериментальные данные, резонансные кривые достигают максимального значения при немного больших h_m , чем имеют магнитные усилители при том же U и h_0 . Так как в режиме с подавленными четными гармониками в цепи управления для магнитного усилителя справедливо равенство намагничивающих сил в средних значениях, то выражение

$$h_m^2 - h_0^2 - 1 = \eta = 0, \quad (18)$$

очевидно, можно рассматривать как условие оптимальности. Оно должно вытекать и из выражения $\frac{\partial U_R}{\partial I_0} = 0$. Равенство (18) при $E = \delta h_m$ позволяет найти максимальный выходной сигнал, если известна емкость

$$\sqrt{h_m^3 + 4} \nu h_m - 4 = 0$$

или емкость при заданной напряженности переменного поля

$$C = \frac{h_m^2}{\omega^2 L_0 [\gamma \cdot h_m^2 + 2(-1 \pm \sqrt{1 + h_m})]}.$$

Для определения релейной характеристики воспользуемся методикой квадратичной формы. Пусть кривая 3 (рис. 4) построена по уравнению (17), когда вспомогательная функция

$$F = \sqrt{h_m^2 + 2} - 0,5 E h_m,$$

что равносильно выполнению тождества (14), или по-другому

$$(-U_L + U_C) = 0,5 U. \quad (19)$$

Кривая представляет собой геометрическое место точек скачкообразного изменения переменного тока при критической нагрузке. Тогда R_0 при уменьшении тока в рабочей цепи можно определить, считая h_m равной максимальному выходному сигналу. При скачкообразном увеличении h_m выполняется помимо (14) еще и $\frac{\partial h_0}{\partial h_m} = 0$.

На рис. 4 представлены также экспериментальные точки срыва и возбуждения колебаний при различных нагрузочных сопротивлениях. Они свидетельствуют о том, что кривая, построенная по уравнению (19),

является «скелетной» кривой. Она позволяет определить все возможные резонансные явления при заданном напряжении и изменении нагрузки.

В заключение отметим, что материалы данной статьи докладывались в 1971 г. на IV Всесоюзной конференции по теории и методам расчета нелинейных электрических цепей (г. Ташкент).

Выводы

1. Методика квадратичной формы, являясь одной из разновидностей теории ветвления, позволяет определить критические фазовые соотношения в последовательном феррорезонансном контуре.

2. Полученные фазовые соотношения являются постоянными, что значительно упрощает нахождение области существования релейных эффектов.

3. Подтверждается возможность получения удовлетворительных данных при определении резонансных кривых по основной гармонике.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. «Наука», 1969.
 2. Т. Хаяси. Нелинейные колебания в физических системах. «Мир», 1968.
 3. С. Н. Гинзбург. Нелинейные цепи и их функциональные характеристики. ГЭИ, 1958.
 4. А. И. Кутявин. Расчет релейных эффектов в последовательной феррорезонансной цепи. Известия ТПИ, т. 244.
 5. Р. Беллман. Введение в теорию матриц. «Наука», 1969.
 6. Л. С. Гольдфарб, Г. Р. Герценберг. Определение гармоник тока и напряжения в электрических цепях, содержащих железо. «Электричество», 1938, № 1.
-