

**ПЕРЕХОДНЫЕ И УСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОЦЕССЫ  
В ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ РЕГУЛИРОВАНИЯ СКОРОСТИ  
ВРАЩЕНИЯ МИКРОДВИГАТЕЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА**

**И. В. Булин-Соколов, С. М. Миронов**

(Представлено научным семинаром кафедр электрических машин  
и общей электротехники)

В настоящее время для регулирования скорости вращения микро-двигателей постоянного тока с независимым возбуждением широкое применение получили широтно-импульсные системы регулирования.

Основными требованиями, предъявляемыми к системам регулирования скорости вращения электродвигателя, являются качество переходных процессов и точность систем при различных возмущающих воздействиях. Поэтому при проектировании систем регулирования необходимо стремиться к оптимизации этих характеристик качества. Этого можно добиться, зная характер влияния различных параметров на качество переходных процессов, точность системы и выбирая оптимальные значения этих параметров. Рассмотрение широтно-импульсных систем регулирования скорости вращения электродвигателя при их исследовании как непрерывных даже тогда, когда соблюдается условие теоремы Котельникова, не позволяет с достаточной полнотой исследовать поведение системы. Например, принципиально не представляется возможным учесть влияние изменения относительной продолжительности управляющих импульсов в номинальном режиме на интересующие характеристики качества системы. Поэтому при исследовании система рассматривалась как импульсная. В качестве математической основы исследований был применен аппарат дискретного преобразования Лапласа.

При проведении исследований были приняты следующие допущения:

- 1) электромагнитными процессами в цепи якоря электродвигателя можно пренебречь;
- 2) относительная продолжительность управляющих импульсов изменяется незначительно;

Структурная схема широтно-импульсной системы регулирования приведена на рис. 1 а.

Сигнал обратной связи, вырабатываемый измерительным органом (ИО) — таходатчиком и имеющий частоту напряжения, пропорциональную скорости вращения электродвигателя, поступает на вход чувствительного элемента (ЧЭ), представляющего собой частотно-фазовый дискриминатор. Последний преобразует переменное напряжение в постоянное, полярность и величина которого являются функцией отклонения частоты входного сигнала от заданного значения. Устройством, формирующим управляющий сигнал, служит широтно-импульсный модулятор (ШИМ). Управление скорости вращения электродвигателя происходит по цепи якоря изменением относительной продолжительности управляющих импульсов.

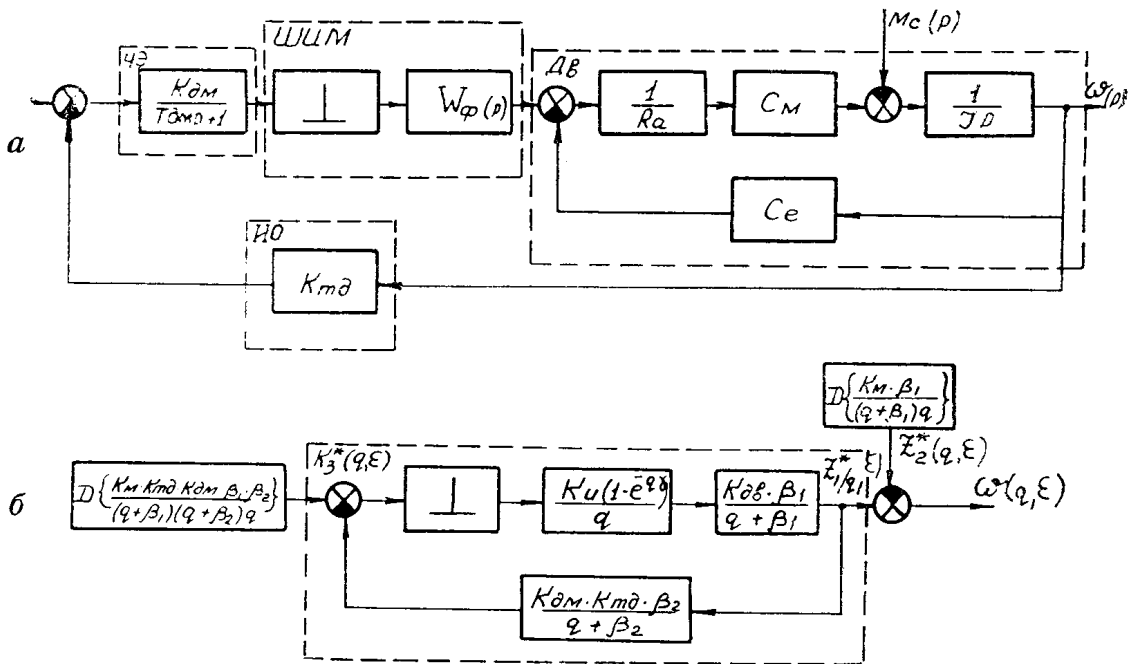


Рис. 1

Для определения передаточной функции замкнутой импульсной системы удобнее внешние воздействия, действующие на систему, привести к входу импульсного элемента [2].

Введем безразмерные величины

$$\bar{t} = \frac{t}{T}; \quad q = p \cdot T,$$

где  $T$  — период коммутации ШИМ, и обозначим

$$\beta_1 = \frac{T}{T_{ДВ}}; \quad \beta_2 = \frac{T}{T_{ДМ}}.$$

Тогда структурная схема системы в приращениях и безразмерных величинах при возмущающем воздействии момента нагрузки на валу двигателя вида единичного скачка примет вид, приведенный на рис. 1 б.

Используя аппарат дискретного преобразования Лапласа, получим передаточную функцию замкнутой системы  $k_3^*(q, \epsilon)$ :

$$k_2^*(q, \epsilon) = \frac{k_{ДВ} \cdot k_{И} \left( 1 - \frac{e^q - e^{-\beta_1(1-\gamma)}}{e^q - e^{-\beta_1}} e^{-\beta_1 \epsilon} \right) (\beta_2 - \beta_1) (e^q - e^{-\beta_1}) \times}{(1 + k_0) (\beta_2 - \beta_1) (e^q - e^{-\beta_1}) (e^q - e^{-\beta_2}) - (e^q - e^{-\beta_2})} \rightarrow$$

$$= \frac{k_0 \beta_2 (e^q - e^{-\beta_2}) (e^q - e^{-\beta_1(1-\gamma)}) + k_0 \beta_1 (e^q - e^{-\beta_1}) (e^q - e^{-\beta_2(1-\gamma)})}{(1 + k_0) (\beta_2 - \beta_1) (e^q - e^{-\beta_1}) (e^q - e^{-\beta_2}) - k_0 \beta_2 (e^q - e^{-\beta_2})} \quad (1)$$

$$k_3^*(q_1 \epsilon) = \frac{k_{И} \cdot k_{ДВ} \cdot e^q (e^{-\beta_1 \gamma} - 1) (e^{-\beta_1(\epsilon - \gamma)} (e^q - e^{-\beta_2}) (\beta_2 - \beta_1))}{(1 + k_0) (\beta_2 - \beta_1) (e^q - e^{-\beta_1}) (e^q - e^{-\beta_2}) - k_0 \beta_2 (e^q - e^{-\beta_2})} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\times (e^q - e^{\beta_1(1-\gamma)}) + k_0 \beta_1 (e^q - e^{-\beta_1}) (e^q - e^{-\beta_2(1-\gamma)})} \quad (2)$$

при  $\gamma \leq \epsilon \leq 1$ ,

где  $k_M$  — коэффициент усиления разомкнутой импульсной системы.

Для определения установившейся ошибки воспользуемся уравнением системы относительно изображений:

$$\omega^*(q, \varepsilon) = k_3^*(q, \varepsilon) \cdot F_{\text{вх}}^*(q, 0) - z_2^*(q, \varepsilon). \quad (3)$$

Так как изменение момента нагрузки является в рассматриваемой системе возмущающим воздействием, то установившейся ошибкой будет являться установившаяся реакция системы на скачок момента нагрузки.

Тогда по теореме о конечных значениях дискретного преобразования Лапласа

$$\Delta \omega_{\text{уст}} = \lim_{q \rightarrow 0} (e^q - 1) [F_{\text{вх}}^*(q, 0) \cdot k_3^*(q, \varepsilon) - z_2^*(q, \varepsilon)]. \quad (4)$$

Переходя от изображения непрерывных функций к изображению безразмерных решетчатых функций, получим:

$$F_{\text{вх}}(q, 0) = D \left\{ \frac{k_M \cdot k_{\text{ТД}} \cdot k_{\text{ДМ}} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2}{(q + \beta_1)(q + \beta_2)q} \right\} = \\ = k_M \cdot k_{\text{ТД}} \cdot k_{\text{ДМ}} \left[ \frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{\beta_2 e^q}{(\beta_2 - \beta_1)(e^q - e^{-\beta_1})} + \frac{\beta_1 e^q}{(\beta_2 - \beta_1)(e^q - e^{-\beta_2})} \right] \quad (5)$$

$$z_2^*(q, \varepsilon) = D \left\{ \frac{k_M \cdot \beta_1}{(q + \beta_1)q} \right\} = k_M \left( \frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{e^q}{e^q - e^{-\beta_1}} \right). \quad (6)$$

Имея в виду (5) и (6), выражение для установившейся ошибки примет вид

$$\Delta \omega_{\text{уст}} = [k_{\text{ДМ}} \cdot k_{\text{ТД}} \cdot k_3^*(0, \varepsilon) - 1] k_M. \quad (7)$$

Подставляя в (7) значение  $k_3^*(q, \varepsilon)$  при  $\varepsilon=0$ , получим

$$\Delta \omega_{\text{уст}} = \left\{ \frac{k_0(\beta_2 - \beta_1)(e^{-\beta_1(1-\gamma)} - e^{-\beta_1})(1 - e^{-\beta_2})}{(\beta_2 - \beta_1)(1 - e^{-\beta_1})(1 - e^{-\beta_2}) + k_0[\beta_2(1 - e^{-\beta_2})(e^{-\beta_1(1-\gamma)} - e^{-\beta_1}) - \beta_1(1 - e^{-\beta_1})(e^{-\beta_2(1-\gamma)} - e^{-\beta_2})] - 1} \right\} k_M. \quad (8)$$

Зависимости установившейся ошибки рассматриваемой импульсной системы от коэффициента разомкнутой системы  $k_0$  и  $\psi = \frac{\beta_2}{\beta_1}$  при различных значениях  $\gamma$  представлены на рис. 2.

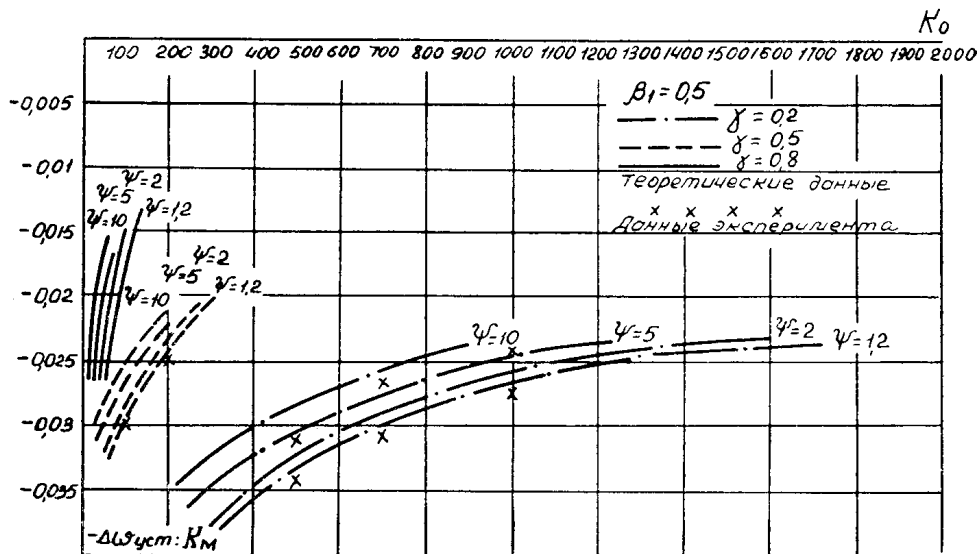


Рис. 2.

Из рис. 2 видно, что с возрастанием  $k_0$  до значения  $k_0 = 0.9K_{огр}$  ( $K_{огр}$  — значение  $k_0$ , соответствующее границе устойчивости\*), установившаяся ошибка монотонно уменьшается, при  $k_0 > k_0'$  зависимости  $\Delta\omega_{уст} = f(k_0)$  не имеют смысла, так как в этом случае система либо неустойчива, либо не обладает необходимым запасом устойчивости по модулю и фазе.

Увеличение относительной продолжительности управляющих импульсов приводит к уменьшению  $\Delta\omega_{уст}$ , причем уменьшение достигается при меньшем  $K_{огр}$ . При уменьшении  $\gamma$  зависимость  $\Delta\omega_{уст} = f(k_0)$  становится более жесткой. С уменьшением  $\beta_1 = \frac{T}{T_M}$  (с уменьшением периода коммутации  $T$  при  $T_M = \text{const}$ ) установившаяся ошибка уменьшается. Наиболее оптимальными с точки зрения минимума  $\Delta\omega_{уст}$  являются значения  $\psi = \frac{T_M}{\text{дм}} = 1 \div 2$ .

Для определения переходного процесса в рассматриваемой импульсной системе представим  $k_3^*(\varepsilon, q)$  в виде

$$k_3^*(q, \varepsilon) = \frac{m_2(\varepsilon)e^{2q} + m_1(\varepsilon)e^q + m_0(\varepsilon)}{p_2e^{2q} + p_1e^q + p_0} = \frac{m_2(\varepsilon) + m_1(\varepsilon)e^{-q} + m_0e^{-2q}}{p_2 + p_1e^{-q} + p_0e^{-2q}} \quad (9)$$

Тогда выражение (3) с учетом (9) запишется:

$$\omega^*(q, \varepsilon) = (p_2 + p_1e^{-q} + p_0e^{-2q})^{-1} [m_2(\varepsilon) + m_1(\varepsilon)e^{-q} + m_0e^{-2q}] F_{вх}(q, 0) - z_2(q, \varepsilon) (p_2 + p_1e^{-q} + p_0e^{-2q})^{-1} \quad (10)$$

где

$$z_2(q, \varepsilon) = D \left\{ \frac{k_M \cdot \beta_1}{(q + \beta_1)q} \right\}; \quad F_{вх}^*(q, 0) = D \left\{ \frac{k_H \cdot k_{ТД} \cdot k_{ДМ} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2}{(q + \beta_1)(q + \beta_2)q} \right\}.$$

Переходя в (10) от изображений к оригиналам, получим рекуррентную формулу, определяющую переходный процесс в импульсной системе при воздействии на нее единичного скачка момента:

$$\omega[n, \varepsilon] \cdot p_2 + p_1\omega[(n-1), \varepsilon] + p_0\omega[(n-2), \varepsilon] = m_2(\varepsilon)f_{вх}[n, 0] + m_1(\varepsilon)f_{вх}[(n-1), 0] + m_0(\varepsilon)f_{вх}[(n-2), 0] - p_2 \cdot z_2[n, \varepsilon] - p_1 \cdot z_2[(n-1), \varepsilon] + p_0 z_2[(n-2), \varepsilon], \quad (11)$$

$$\text{где:} \quad z_2[n, \varepsilon] = k_M [1 - e^{-\beta_1(n+\varepsilon)}]; \quad (12)$$

$$f_{вх} \cdot [n, 0] = k_M \cdot k_{ТД} \cdot k_{ДМ} \left[ 1 - \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} e^{-\beta_1 n} + \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} e^{-\beta_2 n} \right]. \quad (13)$$

Общий характер переходного процесса можно оценить по изменению огибающих, соответствующих максимальному и минимальному значениям процесса. Скорость электродвигателя достигает максимальных и минимальных значений соответственно при  $\varepsilon = \gamma$  и  $\varepsilon = 0$ .

Подставляя значения  $\varepsilon = \gamma$  и  $\varepsilon = 0$  в (11), получим выражения для огибающих переходного процесса:

$$\omega[u, 0] = \frac{m_2(0)f_{вх}[n, 0] + m_1(0)f_{вх}[(n-1), 0] + m_0(0)f_{вх}[(n-2), 0] - p_2 z_2[n, 0] - p_1 z_2[(n-1), 0] - p_0 z_2[(n-2), 0] - p_1 \cdot \omega[(n-1), 0] - p_0 \omega[(n-2), 0]}{p_2} \quad (14)$$

\* Границы устойчивости импульсной системы рассматриваемой структуры были определены в работе [1].

$$\omega[u, \gamma] = \frac{m_2(\gamma)f_{BX}[n, 0] + m_1(\gamma)f_{BX}[(n-1), 0] + m_0(\gamma)f_{BX}[(n-2), 0]}{P_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-p_2 z[n, \gamma] - p_1 z_2[(n-1), \gamma] - p_0 z_2[(n-2), \gamma] - p_1 \omega[(n-1), \gamma]}{P_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-p_0 \omega[n-2, \gamma]}{P_2} \quad (15)$$

Из выражений (1) и (2) получим:

$$\left. \begin{aligned} m_2(0) &= 0 \\ m_1(0) &= k_H \cdot k_{ДВ}(\beta_2 - \beta_1)e^{-\beta_1}(e^{\beta_1 \gamma} - 1) \\ m_0(0) &= -k_H \cdot k_{ДВ}(\beta_2 - \beta_1)e^{-(\beta_1 + \beta_2)}(e^{\beta_1 \gamma} - 1) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} m_2(\gamma) &= -k_H \cdot k_{ДВ}(e^{-\beta_1 \gamma} - 1)(\beta_2 - \beta_1) \\ m_1(\gamma) &= k_H \cdot k_{ДВ}(e^{-\beta_1 \gamma} - 1)(\beta_2 - \beta_1)e^{-\beta_2} \\ m_0(\gamma) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \beta_2 - \beta_1 \\ p_1 &= -\{(\beta_2 - \beta_1)(e^{-\beta_1} + e^{-\beta_2}) + k_0[\beta_2 e^{-\beta_1} - \beta_1 e^{-\beta_2} + \\ &+ \beta_1 e^{-\beta_2(1-\gamma)} - \beta_2 e^{-\beta_1(1-\gamma)}]\} \\ p_0 &= (\beta_2 - \beta_1)e^{-(\beta_1 + \beta_2)} + k_0[(\beta_2 - \beta_1)e^{-(\beta_1 + \beta_2)} - \beta_2 e^{-(\beta_2 + \beta_1(1-\gamma))} + \\ &+ \beta_1 e^{-(\beta_1 + \beta_2(1-\gamma))}] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Используя рекуррентное выражение (14) и (15), можно построить переходный процесс в системе при возмущающем воздействии единичного скачка момента нагрузки, не зная корней характеристического уравнения замкнутой импульсной системы. Последнее особенно важно, поскольку определение значений корней характеристического уравнения замкнутой импульсной системы представляет в системах рассматриваемого типа известную трудность.

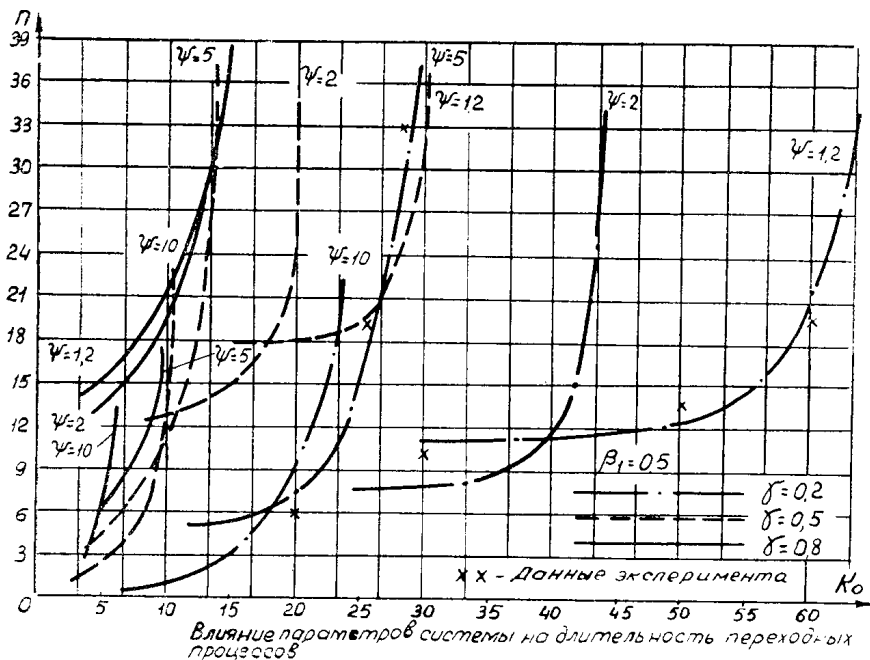


Рис. 3. Влияние параметров системы на длительность переходных процессов

На рис. 3 приведены зависимости относительного времени переходного процесса от коэффициента усиления разомкнутой системы  $K_0$  при различных значениях  $\psi = \frac{T_M}{T_{дм}}$  и  $\gamma$

Из рис. 3 следует, что уменьшение усиления разомкнутой системы  $K_0$  приводит к уменьшению времени переходного процесса, при этом  $\psi$  становится все менее зависимым от изменения  $K_0$ .

Увеличение  $\psi = \frac{T_M}{T_{дм}}$  увеличивает при одинаковом  $\frac{k_{огр}}{k_0}$  быстродействие системы. С увеличением относительной продолжительности управляющих импульсов  $\gamma$  в номинальном режиме при  $\frac{k_{гр}}{k_\varepsilon} = \text{const}$  и  $\psi = \text{const}$  относительное время переходного процесса увеличивается.

Проведенные исследования влияния параметров импульсных систем на точность и быстродействие позволяют оптимизировать системы относительно каждого из этих характеристик качества регулирования. Когда же ставится задача оптимизировать одновременно эти противоречивые характеристики, то необходимо находить компромиссное решение, т. е. при некотором достаточном быстродействии стремиться к минимальной установившейся ошибке импульсной системы.

Анализ выражений (8), (11), (15) и зависимостей  $\Delta\omega_{уст} = f(k_0)$  и  $\frac{t_p}{T} = f(k_0)$  позволяет сделать вывод, что наиболее оптимальные значения параметров с точки зрения минимума установившейся ошибки и времени переходного процесса находятся в пределах:

$$\frac{T_M}{T_{дм}} = 7,7 \div 10; \gamma = 0,7 \div 0,9; k_0 = (0,7 \div 0,8) k_{огр} .$$

Полученные экспериментально значения установившейся ошибки и времени переходного процесса системы регулирования скорости вращения микродвигателя постоянного тока типа ДПР (рис. 2, 3) с достаточной для практики точностью подтверждают правильность проведенных теоретических исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Булин-Соколов, С. М. Миронов. Устойчивость дискретной системы стабилизации скорости вращения микродвигателя постоянного тока. Труды семинара «Маломощные электродвигатели в системах электропривода», проходившего в г. Ленинграде 25—27 ноября 1968 г., Изд. «Энергия», 1969.
2. Я. З. Цыпкин. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963