

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ШУМОВ РЕНТГЕНОВСКИХ
И ФОТОГРАФИЧЕСКИХ ПЛЕНОК**

Л. М. АНАНЬЕВ, А. С. МОСКАЛЕВА, В. А. ШЛОТГАУЭР

При анализе равномерно экспонированного и проявленного образца рентгеновской пленки фотоэлектрическим микрофотометром, неоднородность почернения фиксируется как флуктуации электрического сигнала, полученного в результате преобразования светового потока, прошедшего сквозь слой фото- или рентгеновской пленки. Флуктуации почернения, преобразованные в колебания электрического сигнала, имеют определенный частотный спектр, выражающий распределение по частотному диапазону мощности случайного колебания. Спектр мощности является одной из важнейших характеристик неоднородности почернения.

Для теоретического анализа спектральных характеристик гранулярности и выяснения качественной зависимости характера и величины спектра от физических параметров фотослоя предлагается рассмотреть простейшую одномерную модель результирующего почернения (рис. 1). Для описания случайной функции в общем случае необходимо задаваться ее многомерным распределением, но ввиду изотропности неоднородности почернения, можно ограничиться рассмотрением случайной функции одного аргумента — координаты x слоя.

В литературе [1, 2] известны модели зернистой структуры, применяемые для расчета корреляционных и спектральных характеристик неоднородности почернения. Однако одна из этих моделей основана на весьма упрощенных представлениях зернистости [1], другая, более соответствующая действительности, чрезвычайно усложнена и при расчетах влечет за собой громоздкие математические выкладки. Необходимо отметить, что фотографическое почернение, подвергнутое моделированию, находится в весьма сложной зависимости от множества различных факторов, которые практически невозможно учесть, поэтому стремление повысить точность расчета модели не всегда оправдывается.

Предлагаемая модель зернистой структуры обладает простотой, но в то же время достаточно хорошо отражает основные особенности оригинала. Рассматриваемая модель получена в предположении: а) проявленные зерна, находящиеся в отдельных элементарных слоях, на которые условно разбивается почернение лишь с целью показа механизма получения результирующего почернения (рис. 1), абсолютно непрозрачны; б) различия в размерах проявленных зерен — l в слое несущественны, и для каждой данной эмульсии они могут быть приняты для простоты одинаковыми.

На рис. 1 представлена одномерная модель почернения в виде суммы элементарных слоев, которые, примыкая вплотную друг к другу, создают результирующее почернение. Проявленные зерна — l в слое располагаются вдоль координаты x по закону случая, но в сумме все слои, накладываясь друг на друга, образуют как бы проекции групп

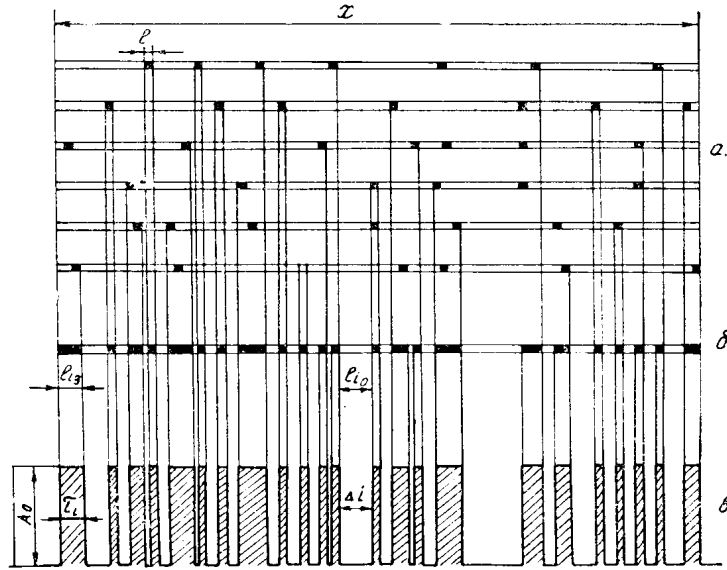


Рис. 1. Одномерная модель почернения: а) элементарные слои; б) результирующее почернение; в) случайная последовательность импульсов при сканировании почернения точечной апертурой

зерен l_i и промежутки между зернами l_{i_0} суммарного почернения. Такая картина наблюдается при микрофотометрировании фотослоя рентгеновской или фотопленки. Суммарное почернение будет неоднородно, и при рассмотрении его по элементарным участкам вдоль координаты x картина будет меняться, поскольку величина почернения будет флуктуировать вокруг некоторого среднего значения — \bar{T} . Предположим, что такое почернение анализируется точечной апертурой фотоэлектрического микрофотометра. При этом получится случайная последовательность прямоугольных импульсов (рис. 1, в), которая характеризуется постоянной амплитудой — A_0 , длительностями τ , соответствующими размерам отдельных групп зерен — l_{i_0} и интервалами между импульсами — Δ_i , соответствующими размерам промежутков между группами зерен l_{i_0} .

Такая импульсная последовательность имеет спектральную плотность, описываемую выражением [3]:

$$S(\omega) = \frac{2A_0^2}{\omega^2 (\langle \tau \rangle + \langle \Delta \rangle)} \operatorname{Re} \frac{[1 - \Theta_1(\omega)] \cdot [1 - \Theta_2(\omega)]}{1 - \Theta_1(\omega) \cdot \Theta_2(\omega)}. \quad (1)$$

Здесь $A_0 = \text{const}$, амплитуда независимых прямоугольных импульсов последовательности. $\langle \tau \rangle$ и $\langle \Delta \rangle$ — математическое ожидание случайных величин τ_i и Δ_i . ω — круговая частота. $\Theta_1(\omega)$ и $\Theta_2(\omega)$ — характеристические функции соответственно длительностей импульсов и интервалов между ними, которые определяются как математическое ожидание соответствующих случайных величин $e^{j\omega\tau}$ и $e^{j\omega\Delta}$, т. е.

$$\Theta_1(\omega) = M(U^{\omega\tau}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} \cdot W(\tau) \cdot d\tau; \quad (2)$$

$$\Theta_2(\omega) = M(U^{\omega\Delta}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\Delta} \cdot W(\Delta) \cdot d\Delta,$$

где $W(\tau)$ и $W(\Delta)$ — плотности вероятностей случайных величин τ и Δ .

В результирующем почернении так же, как и в рассматриваемой модели зерна по размерам и промежутки между ними будут распределены по случайным законам соответственно, длительности импульсов — τ_i и промежутки между ними — Δ_i будут распределены по тем же законам. Предположим, что размеры зерен и промежутки между ними распределены по экспоненциальному закону. Такое предположение не имеет в данном случае принципиального значения, поскольку в нашу задачу входит лишь получение качественных характеристик зернистости (гранулярности). При экспоненциальном законе распределение плотности вероятностей и соответствующие им характеристические функции выражаются:

$$W_1(\tau) = \alpha \cdot e^{-\alpha\tau}, \quad W_2(\Delta) = \beta \cdot e^{-\beta\Delta}. \quad (3)$$

$$\Theta_1(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha - j\omega}, \quad \Theta_2(\omega) = \frac{\beta}{\beta - j\omega}, \quad (4)$$

где α и β — параметры экспоненциального закона распределения соответствующих случайных величин τ_i и Δ_i . Подставив в уравнение (1) значения $\Theta_1(\omega)$ и $\Theta_2(\omega)$, а также значения m_τ и m_Δ , которые для экспоненциального закона равны соответственно $\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{1}{\beta}$, получим выражение для энергетического спектра рассматриваемого процесса:

$$S(\omega) = \frac{2\alpha \cdot \beta A_0^2}{\alpha + \beta} \cdot \frac{1}{\omega^2 + (\alpha + \beta)^2}. \quad (5)$$

Для нахождения спектра зернистости, согласно предложенной модели, необходимо в выражение энергетического спектра (5) ввести основные параметры почернения: \bar{T} , l , l_3 , l_0 . Среднее почернение \bar{T} на участке x можно определить как отношение длины всех затемненных участков (групп зерен) ко всей длине участка, на котором произведено сканирование точечной апертурой.

$$\bar{T} = \frac{\sum l_{i_3}}{\sum l_{i_3} + \sum l_{i_0}}, \quad (6)$$

где l_{i_3} — протяженность i -й группы зерен,
 l_{i_0} — протяженность i -го окна.

Определим на участке сканирования — x среднюю протяженность зерна \bar{l}_3 и среднюю протяженность окна \bar{l}_0 .

$$\bar{l}_3 = \frac{\sum_{i=1}^m l_{i_3}}{m}, \quad \bar{l}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n l_{i_0}}{n}, \quad (7)$$

где m и n — число групп зерен почернения и число промежутков (окон) соответственно. При большом числе зерен можно принять $m = n$. Тогда среднее почернение можно выразить через средние величины \bar{l}_3 и \bar{l}_0 .

$$\bar{T} = \frac{l_3}{l_3 + l_0}. \quad (8)$$

Из выражения (8) можно найти величину \bar{l}_0

$$\bar{l}_0 = \bar{l}_3 \cdot \frac{1 - \bar{T}}{\bar{T}}. \quad (9)$$

Параметры импульсной последовательности связаны с параметрами результирующего почернения следующим образом:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{\bar{l}_3}{v}, \quad \Delta_{\text{ср}} = \frac{\bar{l}_0}{v}, \quad (10)$$

где v — скорость сканирования в *мм/сек*, $\tau_{\text{ср}}$ и $\Delta_{\text{ср}}$ — среднее значение длительности импульса и промежутка между импульсами соответственно.

Из теории вероятностей известно, что математическое ожидание случайной величины при экспоненциальном законе ее распределения выражается как

$$m_\tau = \int_0^{\infty} \tau \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot d\tau = \frac{1}{\alpha} \quad (11)$$

$$m_\Delta = \int_0^{\infty} \Delta \cdot \beta e^{-\beta\Delta} \cdot d\Delta = \frac{1}{\beta}.$$

Учитывая выражения (8) и (9), значения α и β можно записать:

$$\alpha = \frac{1}{m_\tau} = \frac{1}{\tau_{\text{ср}}} = \frac{v}{\bar{l}_3} \quad (12)$$

$$\beta = \frac{1}{m_\Delta} = \frac{1}{\Delta_{\text{ср}}} = \frac{v \cdot \bar{T}}{(1 - \bar{T}) \bar{l}_3}. \quad (13)$$

После подстановки в выражение (5) значений α и β , выраженные через параметры результирующего почернения модели, получим выражение идеального спектра гранулярности:

$$G(n) = \frac{A_0^2}{\pi \cdot \omega_0} \cdot \frac{\bar{T}}{n^2 + \frac{1}{(1 - \bar{T})^2 4\pi^2}}, \quad (14)$$

где $\omega_0 = 2\pi \frac{v}{\bar{l}_3}$ собственная частота образца, связанная с параметрами

почернения $n^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ — номер гармоники спектра. ω — текущая частота, составляющая спектра гранулярности.

Среднее значение квадрата амплитуды шумов или средняя мощность равна интегралу от спектральной плотности:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(n) \cdot dn = A_0^2 \bar{T} (1 - \bar{T}) \quad (15)$$

На рис. 2 приведена зависимость среднеквадратичного отклонения шумов от среднего уровня почернения \bar{T} . Эта характеристика хорошо согласуется с данными, приведенными в литературе [4], что говорит о правомерности принятой модели фотографического почернения. На основе формулы 14 построены семейства характеристик спектра гранулярности (рис. 3, 4) в зависимости от \bar{T} и n . Анализ этих характеристик позволяет сделать следующие выводы:

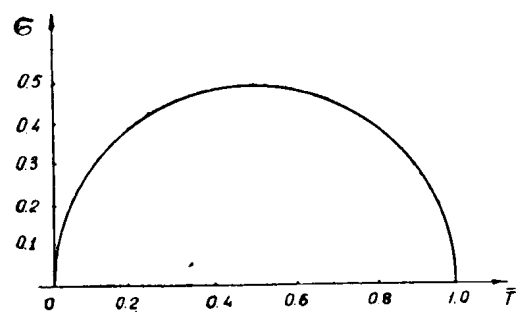


Рис. 2. Зависимость шумов почернения от его среднего уровня

1. Предложенная модель дала возможность теоретически выявить характер спектров гранулярности как шума фото- и рентгеновского изображения и может служить основой при дальнейшем анализе этой категории шумов с целью выяснения возможности уменьшения его влияния при просмотре рентгеновского или фотографического изображений.

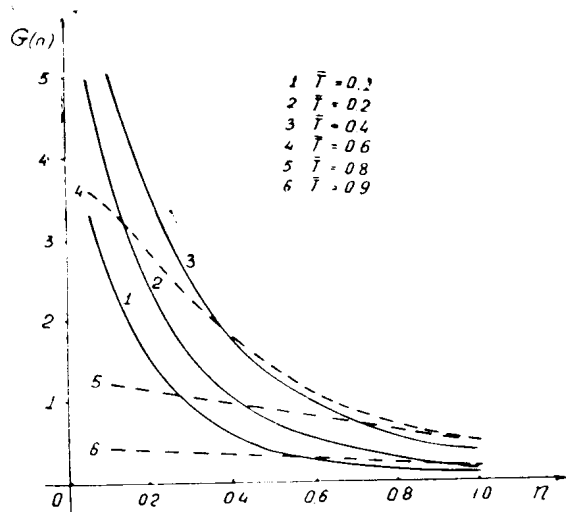


Рис. 3. Зависимость спектра гранулярности при различных уровнях почернения

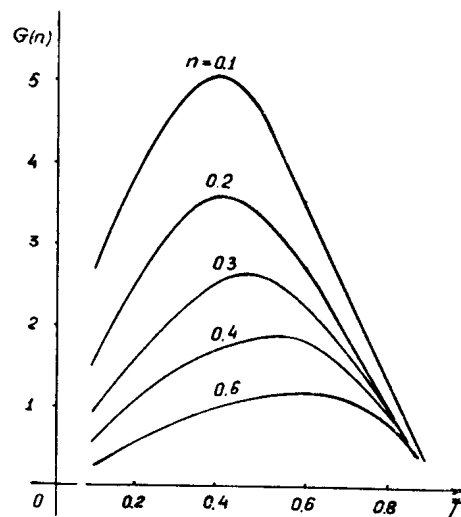


Рис. 4. Зависимость составляющих спектра от почернения

2. Состав спектра гранулярности меняется при переходе от одного значения почернения \bar{T} к другому, при этом низкочастотные составляющие спектра везде обладают наибольшей мощностью (рис. 3).

3. Величина составляющих спектра меняет свое максимальное значение в зависимости от величины среднего уровня почернения, причем с увеличением почернения максимумы сдвигаются вправо (рис. 4).

4. Характеристики гранулярности качественно хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными нами для рентгеновской пленки типа РТ-1 [5], а также с данными, приведенными в литературе [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Fellgett, J. Opt. Soc. Amer. 1953, 43, 271.
2. E. L. O'Neill, J. Opt. Soc. Amer. 1958, 48, 945.
3. В. И. Тихонов. Статистическая радиотехника. «Советское радио», 1966.
4. Р. Б. Гуревич, И. И. Брейдо, Г. А. Гаврилов. Успехи научной фотографии, 10, 171, 1964.
5. А. С. Москалева. Известия вузов, 1970, т. 225.
6. E. J. V. Wall and B. G. Stell. J. Photographic Science, 1964, 12, 34—46.