

## ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРОВ И КООРДИНАТЫ ФЕРРОМАГНИТНОГО ШАРА НА ИМПЕДАНС ВИТКА

В. К. ЖУКОВ

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры информационно-измерительной техники)

Если ферромагнитный металлический шар поместить в проходной вихретоковый преобразователь с короткой обмоткой, то это вызовет изменение импеданса преобразователя. Наибольшее изменение импеданса будет иметь место тогда, когда шар находится в плоскости обмотки. Вносимое шаром возмущение зависит от его размеров и электромагнитных параметров, а также от координаты шара в плоскости обмотки.

В известных работах рассмотрены задачи о шаре в однородном поле [1, 2] и шаре на оси витка или короткого соленоида [3, 4]. Указанные работы не дают ответа на вопрос о влиянии координаты шара на импеданс преобразователя, а это необходимо знать при использовании вихретокового преобразователя для селективного обнаружения металлических предметов.

С целью изучения влияния координаты шара на импеданс преобразователя рассмотрим задачу о малом ферромагнитном шаре в плоскости большого витка. Размеры шара  $2a$  (рис. 1) полагаем много меньше размеров витка  $2R_b$ , что дает основания приблизительно считать шар находящимся в однородном электромагнитном поле.

Определим векторный магнитный потенциал витка с шаром. Для этого решим волновое уравнение

$$\nabla^2 \vec{A} + \kappa^2 \vec{A} = 0 \quad (1)$$

в сферической системе координат  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  (рис. 1).

В силу круговой симметрии вектор  $\vec{A}$  имеет только одну составляющую  $\dot{A}_\varphi = \dot{A}$ , поэтому уравнение (1) в принятой системе координат будет иметь вид

$$\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{dr} \left( r^2 \frac{\partial \dot{A}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \dot{A}}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \dot{A}}{\partial \varphi^2} \right\} + \kappa^2 \dot{A} = 0. \quad (2)$$

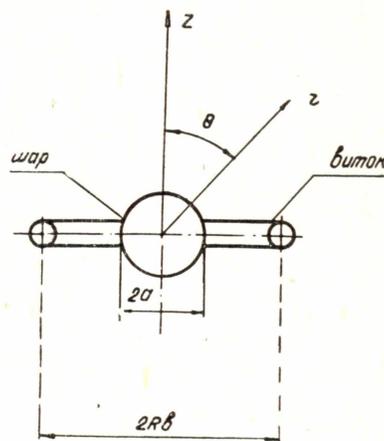


Рис. 1

Поскольку  $\dot{A}$  не зависит от  $\varphi$ , т. е.  $\partial \dot{A} / \partial \varphi = 0$ , то (2) упрощается:

$$2r \frac{\partial \dot{A}}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \dot{A}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}}{\partial \Theta^2} + \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} \frac{\partial \dot{A}}{\partial \Theta} + \kappa^2 r^2 \dot{A} = 0. \quad (3)$$

Для проводящей среды шара  $\kappa^2 = \omega^2 \gamma \mu \mu_0$ , где  $\omega$  — угловая частота тока, протекающего по витку,  $\gamma$  — удельная электропроводность и  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость материала шара. Для воздуха  $\kappa^2 \approx 0$ .

Решение уравнения (3) выполним по методу Фурье, для чего представим  $\dot{A}$  в виде произведения

$$\dot{A} = \dot{A}(r) \cdot \dot{A}(\Theta) \quad (4)$$

двух сомножителей, один из которых  $\dot{A}(r)$  является функцией только координаты  $r$ , а другой  $\dot{A}(\Theta)$  — функцией координаты  $\Theta$ .

После подстановки (4) в (3) последнее распадается на два уравнения:

$$\frac{\partial^2 \dot{A}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \dot{A}(r)}{\partial r} + (\kappa^2 - \lambda/r^2) \dot{A}(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{A}(\Theta)}{\partial \Theta^2} + \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} \frac{\partial \dot{A}(\Theta)}{\partial \Theta} + \lambda \dot{A}(\Theta) = 0, \quad (6)$$

в которых  $\lambda = n(n+1)$  — параметр разделения.

Уравнение (5) подстановкой  $\dot{A}(r) = y(r)/\sqrt{r}$  приводится к уравнению Бесселя

$$r^2 y'' + r y' + \left[ \kappa^2 r^2 - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] y = 0, \quad (7)$$

общее решение которого имеет вид

$$y(r) = \dot{C}'_n Y_{n+1/2}(\kappa r) + D'_n \dot{H}_{n+1/2}(\kappa r). \quad (8)$$

Чтобы удовлетворить условию ограниченности решения при  $r=0$ , следует положить  $\dot{D}'_n = 0$ , вследствие чего

$$y(r) = \dot{C}'_n \cdot Y_{n+1/2}(\kappa r), \quad (9)$$

$$\dot{A}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \dot{C}'_n Y_{n+1/2}(\kappa r), \quad (10)$$

В (10)  $Y_{n+1/2}(\kappa r)$  — функция Бесселя полуцелого порядка от аргумента  $\kappa r$ ,  $\dot{C}'_n$  — постоянная интегрирования.

Общее решение (6) представляется полиномом Лежандра  $P_n(\cos \Theta)$  с аргументом  $\cos \Theta$ :

$$\dot{A}(\Theta) = \dot{C}''_n P_n(\cos \Theta). \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (4), находим общее решение уравнения (3) для проводящей среды шара:

$$\dot{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \dot{C}'_n P_n(\cos \Theta) Y_{n+1/2}(\kappa r). \quad (12)$$

В воздухе  $\kappa^2 = 0$ , поэтому волновое уравнение (1) превращается в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \dot{A}_B = 0, \quad (13)$$

которое с помощью преобразования Фурье в сферических координатах можно представить двумя уравнениями

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_B(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \dot{A}_B(r)}{\partial r} - \frac{\lambda}{r^2} \dot{A}_B(r) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_B(\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \dot{A}_B(\theta)}{\partial \theta} + \lambda \dot{A}_B(\theta) = 0. \quad (15)$$

Параметр разделения  $\lambda = n(n+1)$ .

Уравнение (14) есть уравнение Эйлера, имеющее общее решение

$$\dot{A}_B(r) = \dot{M}'_n r^n + \dot{N}'_n \frac{1}{r^{n+1}}. \quad (16)$$

Уравнение (15) подобно (6) своими корнями имеет полиномы Лежандра

$$\dot{A}_B(\theta) = Q P_n(\cos \theta). \quad (17)$$

Объединяя (16) и (17), находим выражение для векторного потенциала в воздухе

$$\dot{A}_B = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left[ \dot{M}'_n r^n + \dot{N}'_n \frac{1}{r^{n+1}} \right]. \quad (18)$$

Выше мы условились считать поле витка в пространстве, занимаемом шаром, однородным. Векторный потенциал этого поля связан с напряженностью магнитного поля  $\dot{H}_0$  и координатами центра шара  $r, \theta$  соотношением

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \dot{H}_0 r \sin \theta. \quad (19)$$

Вдали от шара векторный потенциал  $\dot{A}_B$  результирующего поля должен стремиться к потенциалу  $\dot{A}_0$  поля витка, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \dot{M}'_n r^n = \frac{1}{2} \mu_0 \dot{H}_0 r \sin \theta. \quad (20)$$

Из (20), приравнявая коэффициенты при  $r^n$  с одинаковыми показателями степени, находим

$$\dot{M}'_1 = \frac{1}{2} \mu_0 \dot{H}_0 r \sin \theta. \quad (21)$$

$$\dot{M}'_n = 0 \text{ при } n \neq 1. \quad (22)$$

Постоянные интегрирования  $\dot{N}'_n$  и  $\dot{C}'_n$  определяются из граничных условий

$$\dot{A}|_{r=a} = \dot{A}_B|_{r=a}, \quad (23)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}) \Big|_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}_B) \Big|_{r=a}. \quad (24)$$

После подстановки и преобразований находим

$$\dot{N}'_1 = \frac{1}{2} \mu_0 \dot{H}_0 \operatorname{tg} \theta a^3 \frac{(1+2\mu) Y_{3/2}(ka) - ka Y_{1/2}(ka)}{(\mu-1) Y_{3/2}(ka) - ka Y_{1/2}(ka)}, \quad (25)$$

$$\dot{N}'_n = 0 \text{ при } n \neq 1. \quad (26)$$

Обозначим

$$\frac{(1 + 2\mu) Y_{3/2}(ka) - ka Y_{1/2}(ka)}{(\mu - 1) Y_{3/2}(ka) - ka Y_{1/2}(ka)} = \tau. \quad (27)$$

Зная постоянные интегрирования, запишем окончательное выражение для векторного магнитного потенциала в воздухе:

$$\dot{A}_B = \frac{1}{2} \mu_0 \dot{H}_0 r \sin \Theta \left( 1 + \frac{a^3}{r^3} \tau \right). \quad (28)$$

Первое слагаемое в (28) определяет поле витка, а второе — возмущение, вносимое шаром.

Векторный потенциал  $\dot{A}_0$  [5] и напряженность  $\dot{H}_0$  [6] магнитного поля витка без шара определяются выражениями:

$$\dot{A}_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi \xi} \sqrt{\frac{1}{\xi}} \left[ \left( 1 - \frac{\xi^2}{2} \right) K(\xi) - E(\xi) \right], \quad (29)$$

$$\dot{H}_0 = \frac{i E(\xi)}{\pi R_B (1 - \xi^2)}, \quad (30)$$

где  $\xi = r/R_B$ ,  $I$  — ток через виток,  $K(\xi)$  и  $E(\xi)$  — полные эллиптические интегралы.

Магнитный поток витка без шара можно определить интегрированием  $\dot{A}_0$  по контуру витка:

$$\dot{\Phi}_0 = \int_0^{2\pi} \dot{A}_0 R_B d\varphi. \quad (31)$$

Подставляя в (31)  $\dot{A}_0$  из (29) и выполняя интегрирование, найдем

$$\dot{\Phi}_0 = 2\mu_0 R_B i \left[ \frac{1}{2} K(\xi_B) - E(\xi_B) \right]. \quad (32)$$

Здесь

$$\xi_B = \frac{R_B - r_{\text{пр}}}{R_B}, \quad (33)$$

определяет нормированную координату внутреннего края витка, выделенного из провода с радиусом  $r_{\text{пр}}$ .

Векторный потенциал поля шара в плоскости, где  $\sin \Theta = 1$ , равен

$$\dot{A}_{\text{ш}} = \frac{1}{2} \mu_0 \dot{H}_0 r \frac{a^3}{r^3} \tau. \quad (34)$$

Если шар смещен относительно центра витка на расстояние  $h$ , то векторный потенциал поля шара в точке с координатами  $R_B$ ,  $\pi/2$ ,  $\varphi$  определится из (34) после подстановки

$$r = \sqrt{h^2 + R_B^2 + 2hR_B \cos \varphi}. \quad (35)$$

Магнитный поток шара, пронизывающий плоскость витка, определим интегрированием (34) по контуру витка с учетом (30), (35) и нового обозначения  $\xi_{\text{ш}} = h/R_B$

$$\dot{\Phi}_{\text{ш}} = \mu_0 R_B i \frac{E(\xi_{\text{ш}})}{(1 - \xi_{\text{ш}}^2)^2} \frac{a^3}{R_B^3} \tau. \quad (36)$$

Изменение магнитного потока, сцепленного с витком, вызванное введением шара, определяется отношением

$$\frac{\dot{\Phi}_{\text{ш}}}{\dot{\Phi}_0} = \frac{E(\xi_{\text{ш}})}{(1 - \xi_{\text{ш}}^2)^2 [K(\xi_{\text{в}}) - 2E(\xi_{\text{в}})]} \frac{a^3}{R_{\text{в}}^3} \tau \quad (37)$$

Изменения импеданса  $\dot{Z}$  и э.д.с. самоиндукции  $\dot{E}$  витка связаны с изменениями магнитного потока

$$\frac{\Delta \dot{Z}}{\dot{Z}_0} = \frac{\Delta \dot{E}}{\dot{E}_0} = \frac{\dot{\Phi}_{\text{ш}}}{\dot{\Phi}_0} \quad (38)$$

и, следовательно, описываются выражением (37).

В (37) множитель

$$\kappa_{\xi} = \frac{E(\xi_{\text{ш}})}{(1 - \xi_{\text{ш}}^2)^2} \quad (39)$$

определяет влияние координаты шара, множитель

$$\kappa_a = \frac{a^3}{R_{\text{в}}^3} \frac{1}{K(\xi_{\text{в}}) - 2E(\xi_{\text{в}})} \quad (40)$$

— влияние размеров шара и множитель  $\tau$  — влияние электромагнитных параметров шара и частоты возбуждающего поля на импеданс и э.д.с. самоиндукции витка.

На рис. 2 графически представлена зависимость  $\kappa_{\xi}$  от нормированной координаты шара  $\xi_{\text{ш}} = h/R_{\text{в}}$ . Из графика видно, что при перемещении шара из центра витка к краю вносимое им возмущение увеличивается на два порядка.

Отношение  $1/[K(\xi_{\text{в}}) - 2E(\xi_{\text{в}})] \approx 1$ , поэтому  $\kappa_a \approx a^3/R_{\text{в}}^3$ . Это означает, что вызванное шаром изменение э.д.с. и импеданса витка пропорциональны кубу отношения их радиусов.

На низкой частоте при  $\kappa a \rightarrow 0$  функции Бесселя полуцелого порядка

$$Y_{1/2}(\kappa a) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa a}} \left[ \kappa a - \frac{(\kappa a)^3}{6} \right],$$

$$Y_{3/2}(\kappa a) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa a}} \frac{1}{3} (\kappa a)^2,$$

вследствие чего  $\tau$  стремится к 2.

При  $\kappa a > 0$  коэффициент  $\tau$  комплексный и по модулю меньше двух.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Дивельковский. Задача о шаре, помещенном в однородное переменное магнитное поле. ЖТФ, т. IX, вып. 5, 1939.
2. М. Н. Боброва. Комплексный магнитный момент неоднородности шара в однородном переменном магнитном поле. Труды СФТИ, вып. 72, 1972.
3. А. А. Фомин. Шар в поле витка с током. ЖТФ, т. XXXIII, вып. 9, 1963.
4. А. Н. Никитин и В. С. Соболев. О воздействии проводящего шара на катушку с током. «Дефектоскопия», № 2, 1969.
5. В. С. Соболев, Ю. М. Шкарлет. Накладные и экранные датчики. Новосибирск, «Наука», 1967.
6. В. А. Говорков. Электрические и магнитные поля. М., «Энергия», 1968.

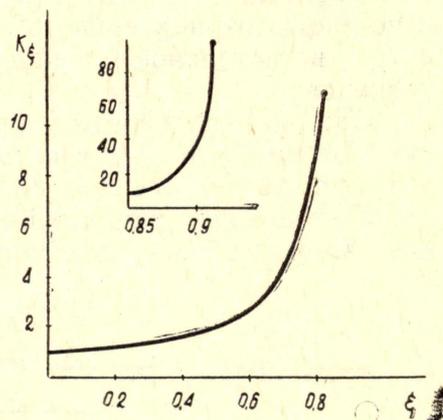


Рис. 2