ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 223 1972

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ УПАКОВОК СФЕР РАВНЫХ ДИАМЕТРОВ С МАЛОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ЗАПОЛНЕНИЯ

В. А. ВОРОБЬЕВ, В. К. КИВРАН, И. Э. НААЦ

(Представлена научным семинаром УВЛ)

При моделировании случайных упаковок сфер с очень малой плотностью заполнения, когда размерами сфер можно пренебречь по сравнению с расстояниями между соседними сферами, пространственное распределение упакованных сфер можно заменить распределением точек, совпадающих с центрами сфер. В этом случае при равномерном заполнении пространства распределение вероятности числа точек (сфер) в каком-то объеме подчиняется закону распределения Пуассона, а моделирование таких упаковок можно заменить генерированием трехмерных случайных чисел с равномерным законом распределения, которые являются центрами упакованных сфер. Для получения более плотных упаковок непересекающихся сфер необходимо проводить проверку пересечений сфер с исключением из упаковки пересекаемых сфер. Случайный характер упаковок в этом случае не меняется, появляются лишь некоторые отклонения в пространственном распределении сфер от пуассоновского закона.

Модель указанной упаковки на цифровых электронно-вычислительных машинах (ЦВМ) может быть получена по следующему алгоритму. Упаковка сфер производится последовательно, по одной сфере, причем при упаковке очередной сферы положение в пространстве ранее упакованных сфер не меняется. Пусть в памяти ЦВМ находятся координаты центров уже упакованных сфер. Для упаковки очередной сферы разыгрывается трехмерное случайное число с равномерным законом распределения [1]. Затем в данную точку помещается центр сферы и проверяется возможность пересечения пакуемой сферы другими, ранее упакованными. Для пересекаемых сфер расстояние между центрами пересекающих сфер должно быть по величине не меньше диаметра сферы (пакуются сферы равных размеров). Если пакуемая сфера не пересекается ни с одной ранее упакованной, сфера считается упакованной, ее координаты записываются в памяти ЦВМ. Если же пакуемая сфера пересекается хотя бы с одной, ранее упакованной, считается, что в данную точку центр пакуемой сферы поместить нельзя, делается повторная попытка упаковать данную сферу путем нового розыгрыша трехмерного случайного числа и аналогичной проверки.

Описанный выше алгоритм упаковки можно реализовать на ЦВМ с помощью программы, составленной по нижеследующей блок-схеме (рис. 1). По данной блок-схеме производится упаковка сфер в куб, расположенный в первом октанте прямоугольной системы координат, одна из вершин которого находится в начале координат. Величина диаметра сферы d измеряется в долях длины ребра куба, поэтому длина ребра куба равна единице. По данной блок-схеме производится упаковка заданного количества n сфер с заданным диаметром.

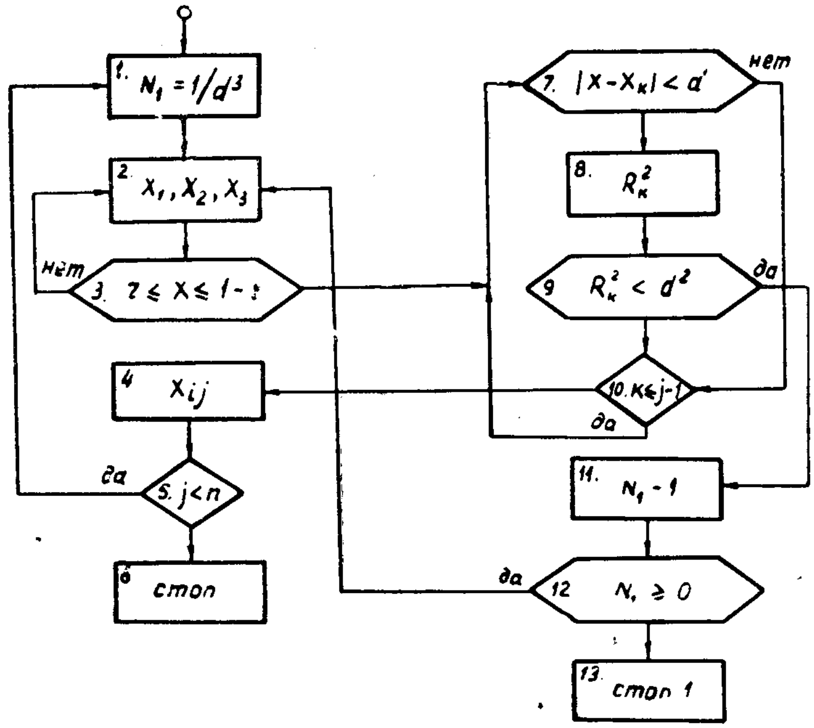

Рис. 1. Блок-схема программы случайной упаковки равных сфер с малой плотностью заполнения

Во время упаковки сфер возможен момент, когда больше ни одна сфера не может быть упакована без пересечения ее ранее упакованными сферами (по условию алгоритма их пространственное положение меняться не может). Для выявления этого момента в блок-схеме предусмотрено следующее. При практическом опробовании на ЦВМ данного алгоритма установлено, что при упаковке сфер диаметром 0,1 после 1000 неудачных попыток упаковать очередную сферу вероятность того, что она все же может быть упакована при последующих попытках, пренебрежительно мала. Поэтому и в данной блок-схеме принято, что если за $1/d^3$ попыток сфера не пакуется, процесс упаковки останавливается. Поэтому же и работа программы по данной блок-схеме для упаковки каждого j-го из n требуемых сфер начинается с организации обратного счетчика N_1 (бл. 1), при каждой неудачной попытке упаковать очередную сферу из него вычитается по единице.

Далее следует розыгрыш трехмерного случайного числа (бл. 2) — центра пакуемой сферы и проверка на пересечение пакуемой сферы гранями куба (бл. 3). Если для каждой координаты выполняется условие

$$r \leqslant x_i \leqslant 1 - r, \qquad i = 1, 2, 3, \qquad (1)$$

где r — радиус сферы, грани куба не могут пересекать пакуемую сферу, центр этой сферы может принять ранее разыгранные случайные координаты. При невыполнении условия (1) розыгрыш координат повторяется. От такой манипуляции закон равномерного распределения случайных чисел не нарушается, только диапазон представления их сокращается с каждой стороны диапазона на величину радиуса сферы.

Далее следует проверка на пересечение пакуемой сферой ранее упакованных. Если для всех сфер соблюдается условие

$$R_k^2 = (x_1 - x_{1k})^2 + (x_2 - x_{2k})^2 + (x_3 - x_{3k})^2 \geqslant d^2, \quad (2)$$

$$k = 1, 2, \ldots, j-1,$$

то сфера с координатами x_1, x_2, и x_3 может быть упакована без пересечения ранее упакованными сферами. Здесь x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}— координаты каждого из $j-1$ ранее упакованных сфер. Проверка условия (2) выполняется в два этапа. В начале (бл. 7) делается проверка условий

$$|x_i - x_{ik}| \geqslant d, \quad (3)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

что автоматически влечет к выполнению условия (2) при выполнении хотя бы одного из этих условий, а это означает, что данные две сферы не пересекаются. В этом случае проверка условия (2) становится излишней, начинается проверка условий (2) и (3) для следующей из $j-1$ сфер (через бл. 10). При выполнении всех условий (3) для k-й сферы вычисляется величина R_k^2 (бл. 8) и производится проверка (бл. 9) условия (2). Если это условие выполняется, т. е. пакуемая сфера не пересекается с k-й сферой, начинается проверка условий (2) и (3) для следующей сферы.

Если пакуемая сфера не пересекается ни с одной ранее упакованной сферой, при выполнении всех условий (2), сфера считается упакованной, ее координаты записываются в соответствующий массив памяти ЦВМ (бл. 4). Если же не выполняется хотя бы одно из условий (2), делается повторная попытка установки сферы розыгрышем нового трехмерного случайного числа (бл. 2), предварительно вычтя единицу из счетчика N_1 (бл. 11). При полной же очистке счетчика N_1 (бл. 12) производится остановка процесса заполнения (бл. 13), происходит так называемое насыщение упаковки.

Программа по вышеописанной блок-схеме была опробована на ЦВМ М-20 с диаметром сфер 0,1. Процесс упаковки протекал до насыщения. В разных опытах количество сфер в упаковке достигало 473 ÷ ÷ 506, что соответствует плотности упаковки (отношение суммарного объема всех упакованных сфер к объему пакуемого куба) 0,248 ÷ 0,265. Время упаковки такого количества сфер (до насыщения) составляло от 4 до 8 *мин*. Время же достижения плотности упаковки 0,2 в такой же куб составляет не более 2 *мин*.

Следует отметить, что максимальная величина так называемой плотности заполнения, имеющая смысл при большом количестве сфер или при упаковке в большом объеме, должна быть несколько выше, так как в приведенных выше цифрах не учитывается граничный эффект.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. И. Голенко. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. Изд. «Наука», М., 1965.