

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Г. А. ДОЩИНСКИЙ, А. М. КОРЕНЕВА

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Теория пластического течения, являющаяся одним из направлений теории пластичности, находит широкое приложение в целом ряде технологических задач, связанных с обработкой металлов давлением. Вместе с тем, следует отметить, что в настоящее время еще нельзя признать полностью экспериментально доказанной надежность основных положений этой теории. Несмотря на наличие большого ряда экспериментальных работ, относящихся к теории течения, проверка основных закономерностей этой теории в различных условиях нагружения и деформирования остается весьма желательной и необходимой в плане развития общей теории пластичности. Многие экспериментальные исследования касаются проверки лишь отдельных сторон и следствий теории течения: изменения формы поверхности текучести, изменения мгновенного модуля при ортогональном нагружении, сравнения расчетных зависимостей теории течения и теории малых упруго-пластических деформаций с результатами частных опытов и т. п. Остаются желательными и поиски способов интегрирования дифференциальных соотношений теории для определения конечных значений напряжений и деформаций.

Задачей настоящего исследования являлось непосредственное изучение процесса пластического течения при сложном нагружении с помощью конечно-разностного представления дифференциальных соотношений теории. На основе данных эксперимента рассмотрена возможность приближенного расчета деформаций для условий, аналогичных реализованным в опыте. Исследования ограничивались классом нагружений с сохраняющимся направлением главных осей тензора напряжений.

Исходное положение теории пластического течения предполагает соосность и подобие девиаторов напряжений и приращений деформаций (скоростей деформации): полных (форма Сен-Венана-Леви-Мизеса) или пластических (форма Прандтля — Рейса).

$$d\varepsilon'_{jk} = \sigma'_{jk} \cdot d\Phi. \quad (1)$$

Предполагается, что множитель $d\Phi$ не зависит от вида нагружения. В рассматриваемом классе нагружений для главных направлений имеем:

$$d\varepsilon_j - d\varepsilon = d\Phi(\sigma_j - \sigma), \quad (j=1, 2, 3); \quad d\varepsilon = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{j=3} d\varepsilon_j; \quad \sigma = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{j=3} \sigma_j.$$

При допущении о неизменности объема при пластической деформации $d\varepsilon=0$.

Основная система уравнений:

$$\begin{aligned}d\Theta_1 &= d\Phi(\sigma_1 - \sigma) = \frac{2}{3} [\sigma_1 - 0,5(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\d\Theta_2 &= d\Phi(\sigma_2 - \sigma) = \frac{2}{3} [\sigma_2 - 0,5(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\d\Theta_3 &= d\Phi(\sigma_3 - \sigma) = \frac{2}{3} [\sigma_3 - 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\quad (2)$$

предполагает определенную структуру дифференциального множителя $d\Phi$, а именно, используя представление

$$d\Theta_j = d\Theta_j - \frac{d\varepsilon}{3} \quad (j=1,2,3),$$

возводя обе части уравнений (2) в квадрат и суммируя, получим

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{3}(d\Theta_1^2 + d\Theta_2^2 + d\Theta_3^2 - d\Theta_1 \cdot d\Theta_2 - d\Theta_2 \cdot d\Theta_3 - d\Theta_3 \cdot d\Theta_1)} &= \\= \frac{\sqrt{2}}{3} d\Phi \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1)},\end{aligned}$$

откуда следует

$$d\Phi = \frac{3}{2} \frac{d\Theta_i}{\sigma_i}; \quad d\Theta_j = \frac{3}{2} \frac{d\Theta_i}{\sigma_i} (\sigma_j - \sigma) \quad (j=1, 2, 3), \quad (3)$$

где $d\Theta_i$ — интенсивность приращений деформаций;

σ_i — интенсивность напряжений.

Уравнения (2) для плоского напряженного состояния ($\sigma_3=0$) принимают вид:

$$\begin{aligned}d\Theta_1 &= d\Phi [\sigma_1 - 0,5\sigma_2]; \\d\Theta_2 &= d\Phi [\sigma_2 - 0,5\sigma_1]; \\d\Theta_3 &= d\Phi [-0,5(\sigma_1 + \sigma_2)],\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$d\Phi = \frac{d\Theta_i}{\sigma_i}.$$

Непосредственная проверка этих уравнений и являлась целью настоящего эксперимента.

Испытания проводились на медных отожженных трубчатых образцах с изменением продольной нагрузки и внутреннего давления соответственно заранее заданной программе. Толщина стенки t и средний диаметр $2R$ соответственно были равны 1,5 мм и 33,3 мм. Испытания проводились на машине ЦДМУ-30. Конструкция приборов для измерения деформаций описана в [1].

В рассматриваемой серии опытов использовалось параметрическое задание пути нагружения $\sigma_1=f_1(\lambda)$, $\sigma_2=f_2(\lambda)$, а именно степенного характера

$$\sigma_1 = A\lambda^n, \quad \sigma_2 = B\lambda^m. \quad (5)$$

Осевое σ_1 и окружное σ_2 напряжения определялись по выражениям:

$$\sigma_1 = \frac{P}{2\pi R t} + \frac{qR}{2t}; \quad \sigma_2 = \frac{qR}{t}.$$

Задаваемые программные значения осевой нагрузки P и внутреннего давления q при этом:

$$P = 2\pi R t \left(A\lambda^n - \frac{B\lambda^m}{2} \right), \quad q = \frac{B\lambda^m \cdot t}{R}.$$

Значения A , B , n , m подбирались таким образом, чтобы пути нагружения сходились в одной точке. Реализованные программы нагружения показаны на рис. 1. Для контроля изотропности материала образцов использовалось простое нагружение $\sigma_1 = \sigma_2$. Осевая \mathcal{E}_1 и окружная \mathcal{E}_2 деформации, как видно из рис. 2, мало различались между собой. Эту же цель преследовало и дублирование некоторых (2, 3) программ (рис. 1) со сменой напряжений σ_1 и σ_2 в осевом и окружном направлении.

На каждой ступени нагружения при соответствующем значении параметра λ проводилось измерение осевой e_1 и окружной e_2 деформаций. Пластические части деформации определялись исключением упругих составляющих, подсчитанных на основе обобщенного закона Гука, при значениях:

$$E = 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad \mu = 0,32.$$

$$\mathcal{E}_j = e_j - \varepsilon_j = e_j - \frac{1}{E} [\sigma_j - \mu(\sigma_e + \sigma_k)], \quad \begin{matrix} \nearrow j \\ e \\ \leftarrow k \end{matrix} (j, e, k = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Радиальная пластическая деформация определялась из условия неизменности объема при пластической деформации. Зависимость полученных пластических деформаций \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 от параметра нагружения показана на рис. 2 (множитель A введен для удобства сопоставления кривых).

Прежде всего можно отметить, что результаты опыта выразительно указывают на отсутствие пластического потенциала деформаций. Если при упругой деформации различные пути нагружения дают в общей точке одни и те же значения компонентов деформации, то в данном случае значения \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 для состояния, соответствующего общей конечной точке (помечена крестиком), весьма сильно зависят от истории нагружения.

Для проверки условия подобия девиаторов напряжений и приращений пластической деформации исключим множитель $d\Phi$ в выражениях (4)

$$\frac{d\mathcal{E}_2}{d\mathcal{E}_1} = \frac{\sigma_2 - 0,5\sigma_1}{\sigma_1 - 0,5\sigma_2}, \quad \frac{d\mathcal{E}_3}{d\mathcal{E}_1} = \frac{-0,5(\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_1 - 0,5\sigma_2}. \quad (7)$$

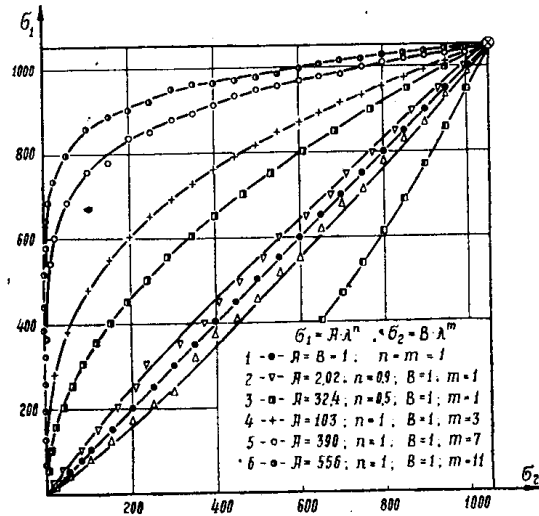


Рис. 1

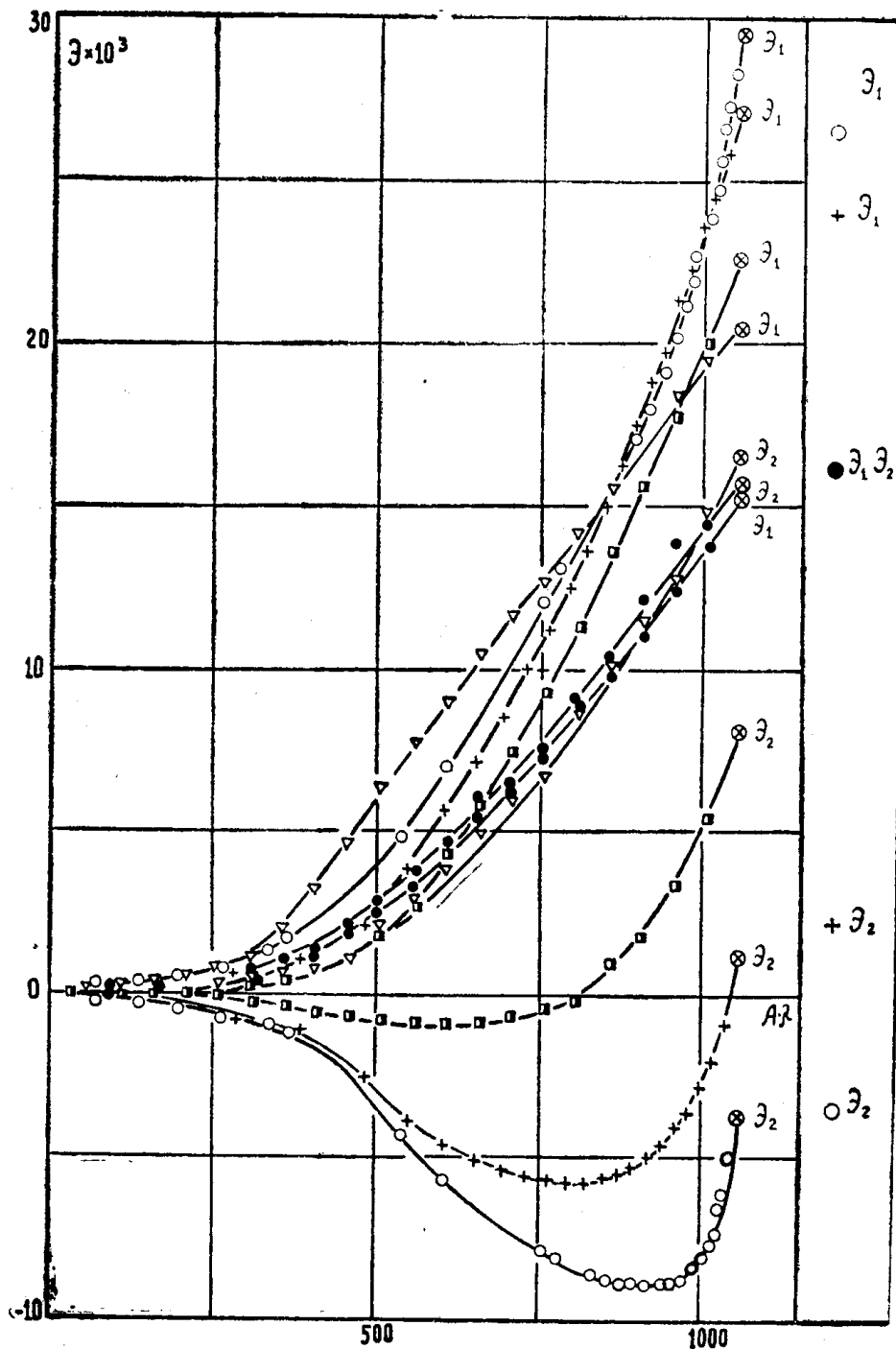


Рис. 2

По замеренным в опыте величинам напряжений и деформаций строились графики σ_1 ; σ_2 ; \mathcal{E}_1 ; $\mathcal{E}_2 = \psi_j(\lambda)$, по которым для каждой ступени ξ дифференцирования, при шаге $\Delta = \frac{\lambda}{21}$ определялись приращения пластических деформаций и напряжений.

$$d\mathcal{E}_j = \mathcal{E}_j^{\xi+1} - \mathcal{E}_j^{\xi}, \quad \sigma_j = \frac{\sigma_j^{\xi+1} + \sigma_j^{\xi}}{2}.$$

Полученные результаты для нескольких программ представлены на рис. 3. Сплошные линии соответствуют отношению напряжений точки отношению приращений деформаций. Эти результаты позволяют отметить, что условие подобия девиаторов напряжений и приращений деформаций выполняется для условий простого нагружения (программа 1) и в первом приближении соответствует и условиям сложного нагружения для рассматриваемых траекторий умеренной кривизны. В последнем случае, однако, преимущественно наблюдается картина, подобная показанной на рис. 3 для программы 3 с некоторым пересечением хотя и сходных по характеру кривых, соответствующих соотношениям напряжений и приращений пластических деформаций.

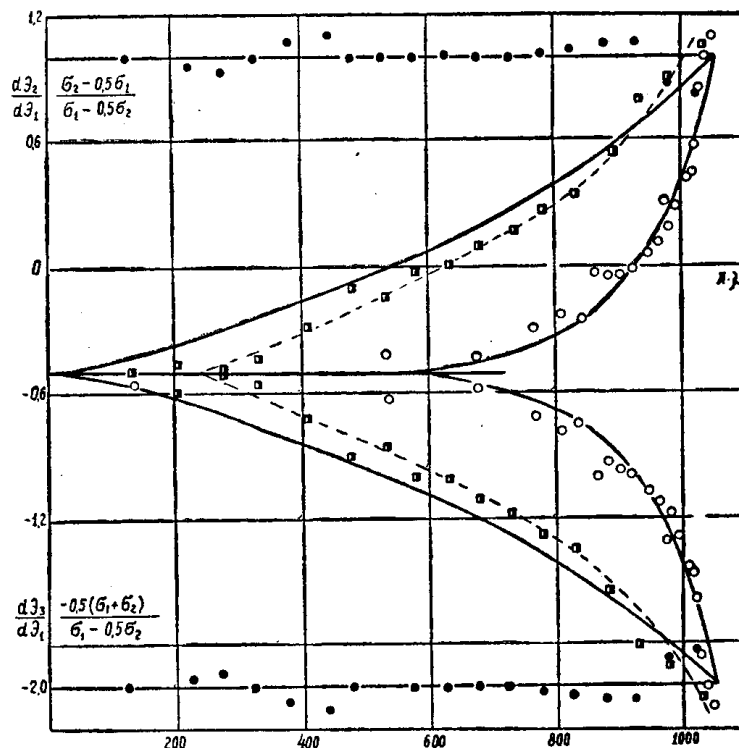


Рис. 3

Насколько лучше выполняются при сложном нагружении условия подобия девиаторов напряжений и приращений деформаций, чем девиаторов самих деформаций, показывает рис. 4, где приведены соответствующие значения параметров Лоде, подсчитанных для программы 5. Значения параметров Лоде для деформаций значительно отходят от диагонали, определяющей подобие девиаторов, по сравнению с соответствующим параметром ν для приращений пластических деформаций.

По результатам испытаний образцов данной серии отмечалось незначительное отклонение от зависимости $\sigma_i - e_i$, полученной при простом нагружении, хотя в других опытах, на сложное нагружение при различных программах и материалах, проведенных авторами, эти расхождения были существенно заметнее.

Экспериментальной проверке также подвергалось предположение о независимости функции $\Phi = \Phi(\sigma_i)$ от вида нагружения (точнее, производной функции или дифференциального множителя $d\Phi$).

Исходя из уравнений (4) значение $d\Phi$ для каждого из главных направлений соответственно определяется

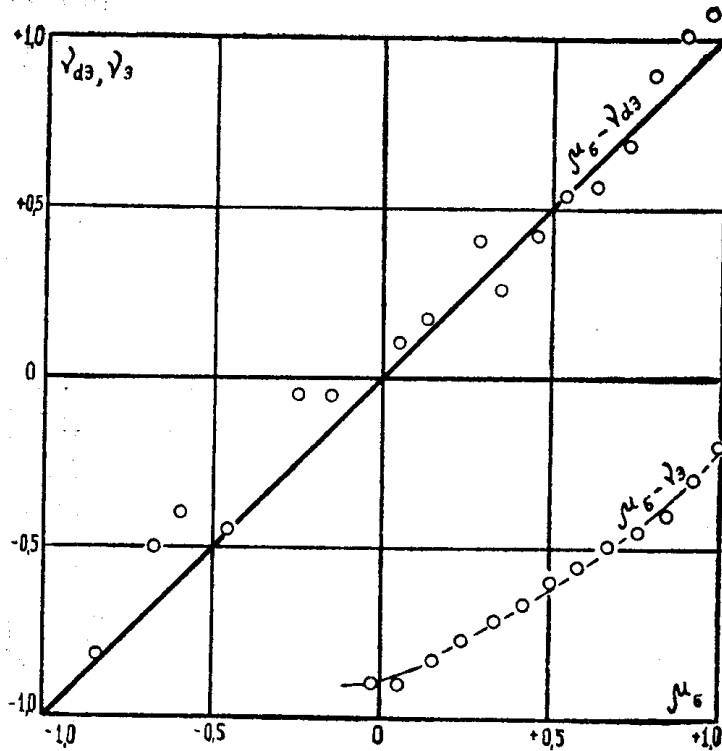


Рис. 4

$$d\Phi_1 = \frac{d\varepsilon_1}{\sigma_1 - 0,5\sigma_2}; \quad d\Phi_2 = \frac{d\varepsilon_2}{\sigma_2 - 0,5\sigma_1}; \quad d\Phi_3 = \frac{d\varepsilon_3}{-0,5(\sigma_1 + \sigma_2)}. \quad (8)$$

Используя экспериментально наблюдаемые значения приращений деформаций и напряжений для одной и той же стадии нагружения, характеризующейся одинаковой интенсивностью напряжений σ_i , в различных программах подсчитывалось среднее значение

$$d\Phi = \frac{d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3}{3},$$

которое наносилось на график $d\Phi - \sigma_i$ (рис. 5). Несмотря на естественный и неизбежный при данной методике большой разброс (так как измерение приращений по точности значительно ниже, чем измерение самих деформаций), из графика 5 видно, что в первом приближении предположение о независимости $d\Phi$ от вида нагружения выполняется в рассмотренном классе нагружений.

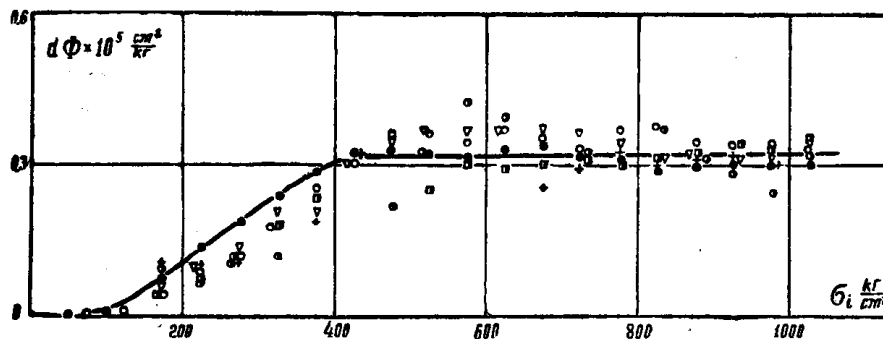


Рис. 5

Если принять это положение, то величина $d\Phi$ может быть установлена в испытании на простое нагружение. Для простого нагружения интенсивность приращений деформаций равна приращению интенсивности (интенсивность скоростей деформации равна производной по времени от интенсивности деформации). Это, в свою очередь, позволяет наметить следующую возможность приближенного расчета деформаций.

Пусть диаграмма растяжения аппроксимируется зависимостью

$$\sigma_i = C \cdot e_i^k, \quad (9)$$

где C и k — постоянные материала (значения их для данного материала были определены: $C = 4850 \text{ кг/см}^2$, $k = 0,45$).

Тогда

$$e_i = \left(\frac{\sigma_i}{C}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad de_i = \frac{1}{k \cdot C^{\frac{1}{k}}} \sigma_i^{\frac{1}{k}-1} \cdot d\sigma_i,$$

$$d\Phi = \frac{d\mathcal{E}_i}{\sigma_i} \approx \frac{de_i}{\sigma_i} = \frac{1}{k \cdot C^{\frac{1}{k}}} \sigma_i^{\frac{1}{k}-2} \cdot d\sigma_i. \quad (10)$$

Найденное значение $d\Phi$ при простом нагружении используется далее для произвольного нагружения рассматриваемого класса. Выражение (10) может быть уточнено исключением упругой деформации

$$\mathcal{E}_i = e_i - \varepsilon_i = \left(\frac{\sigma_i}{C}\right)^{\frac{1}{k}} - \frac{\sigma_i}{E}; \quad d\Phi = \frac{d\mathcal{E}_i}{\sigma_i} = \left(\frac{1}{k \cdot C^{\frac{1}{k}}} \sigma_i^{\frac{1}{k}-2} - \frac{1}{\sigma_i \cdot E}\right) d\sigma_i.$$

Однако такое уточнение существенно усложняет расчет деформаций, и в дальнейшем приближенном расчете используется форма (10). Уточнение указанного рода возможно также и перестройкой диаграммы $\sigma_i - e_i$ в диаграмму $\sigma_i - \mathcal{E}_i$ с последующей аналитической аппроксимацией зависимости между растягивающим напряжением и продольной пластической деформацией.

Для возможности интегрирования уравнений (4) выразим все входящие величины, например, через σ_1 .

Для рассматриваемого вида сложных нагружений, определяемого условиями (5),

$$\sigma_2 = B \left(\frac{\sigma_1}{A}\right)^{\frac{m}{n}}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \sigma_1 \sigma_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \frac{B^2}{A^{\frac{2m}{n}}} \sigma_1^{2\frac{m}{n}} - \frac{B}{A^{\frac{m}{n}}} \sigma_1^{\frac{m}{n}+1}}.$$

Дифференцируя последнее по σ_1 , получим

$$d\sigma_2 = \frac{1}{2\sigma_2} \left[2\sigma_1 + 2 \frac{m}{n} \frac{B^2}{A^{\frac{2m}{n}}} \sigma_1^{2\frac{m}{n}-1} - \left(\frac{m}{n} + 1\right) \frac{B}{A^{\frac{m}{n}}} \sigma_1^{\frac{m}{n}} \right] d\sigma_1.$$

Поэтому $d\Phi$ принимает вид

$$d\Phi = \frac{1}{2k \cdot C^{\frac{1}{k}}} \left[\sigma_1^2 + \frac{B^2}{A^{\frac{2m}{n}}} \sigma_1^{2\frac{m}{n}} - \frac{B}{A^{\frac{m}{n}}} \sigma_1^{\frac{m}{n}+1} \right]^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k}-3\right)} \cdot \left[2\sigma_1 + 2 \frac{m}{n} \frac{B^2}{A^{\frac{2m}{n}}} \sigma_1^{2\frac{m}{n}-1} - \left(\frac{m}{n} + 1\right) \frac{B}{A^{\frac{m}{n}}} \sigma_1^{\frac{m}{n}} \right] d\sigma_1.$$

Для интегрирования разложим степенной сомножитель по биному Ньютона, ограничиваясь двумя членами разложения

$$\left[\sigma_1^2 + \frac{B^2}{A^2 \frac{m}{n}} \sigma_1^{2 \frac{m}{n}} - \frac{B}{A \frac{m}{n}} \sigma_1^{\frac{m}{n}+1} \right]^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 3 \right)} \approx$$

$$\approx \sigma_1^{\frac{1}{k} - 3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 3 \right) \frac{B^2}{A^2 \frac{m}{n}} \sigma_1^{2 \frac{m}{n} + \frac{1}{k} - 5} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 3 \right) \frac{B}{A \frac{m}{n}} \sigma_1^{\frac{m}{n} + \frac{1}{k} - 4}.$$

Окончательные выражения для подсчета деформаций принимают вид:

$$\Theta_1 = \int_0^{\sigma_1} \left(\sigma_1 - \frac{B}{2A \frac{m}{n}} \sigma_1^{\frac{m}{n}} \right) d\Phi; \quad \Theta_2 = \int_0^{\sigma_1} \left(\frac{B}{A \frac{m}{n}} \sigma_1^{\frac{m}{n}} - \frac{1}{2} \sigma_1 \right) d\Phi;$$

$$d\Phi = \frac{1}{2k \cdot C \frac{1}{k}} \left[\sigma_1^{\frac{1}{k} - 3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 3 \right) \frac{B^2}{A^2 \frac{m}{n}} \sigma_1^{2 \frac{m}{n} + \frac{1}{k} - 5} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 3 \right) \frac{B}{A \frac{m}{n}} \sigma_1^{\frac{m}{n} + \frac{1}{k} - 4} \right].$$

$$\cdot \left[2\sigma_1 + 2 \frac{m}{n} \frac{B^2}{A^2 \frac{m}{n}} \sigma_1^{2 \frac{m}{n} - 1} - \left(\frac{m}{n} + 1 \right) \frac{B}{A \frac{m}{n}} \sigma_1^{\frac{m}{n}} \right] d\sigma_1. \quad (11)$$

Третья компонента пластической деформации может быть найдена из условия неизменности объема

$$\Theta_3 = -(\Theta_1 + \Theta_2). \quad (12)$$

Для проверки выражений (11) рассмотрим простое нагружение вида $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. В этом случае $A = B = m = n = 1$. Подставляя в (11), получим

$$\Theta_1, \Theta_2 = \frac{1}{2k \cdot C \frac{1}{k}} \int_0^{\sigma} \left\{ \left(\sigma - \frac{\sigma}{2} \right) \left[\sigma^{\frac{1}{k} - 3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 3 \right) \sigma^{\frac{1}{k} - 5} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - 3 \right) \sigma^{\frac{1}{k} - 4} \right] (2\sigma + 2\sigma - 2\sigma) \right\} d\sigma = \frac{\sigma^{\frac{1}{k}}}{2C \frac{1}{k}} = \frac{e_i}{2}.$$

С другой стороны, из выражения интенсивности деформаций для такого случая, имея в виду очевидное для изотропного материала $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$, имеем вместе с условием (12)

$$\Theta_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_1 \cdot \Theta_2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{3\Theta^2} = 2\Theta,$$

откуда

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{\Theta_i}{2} \approx \frac{e_i}{2}.$$

Используя выражения (11), был проведен аналитический подсчет деформаций Θ_1 и Θ_2 в конце участка нагружения для некоторых из осуществленных программ при использовании значений C и k , аппроксими-

мировавших диаграмму $\sigma_i - e_i$, приведенных выше. Подсчитанные значения показаны с правой стороны графика 2 (обозначены соответствующими программными значками).

Приведенные данные показывают, что в условиях сложного нагружения (даже в рассмотренном классе траекторий умеренной кривизны) деформационная теория несостоятельна; соотношения простейших форм течения (Леви—Мизеса—Рейса) оправдываются лишь приближенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Максак, Г. А. Дошинский. К методике исследования пластической деформации при сложном нагружении. Известия ТПИ, т. 147, изд. Томского университета, 1966.

2. В. В. Новожилов. О классе сложных нагружений, который характеризуется сохранением направлений главных осей. Прикладная математика и механика, т. XVIII, изд. АН СССР, 1954.

3. Ху Л., Мэрин Д. Нахождение теоретической зависимости между напряжением и деформацией в пластической области при переменном отношении напряжений. Сб. переводов, «Механика», 5 (21), изд. ИЛ. 1953.
