ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 225 1972

СИНТЕЗ ОДНОЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПАССИВНЫХ ЦЕПЕЙ И ОПЕРАЦИОННЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

В. М. ОСИПОВ, В. И. ГОНЧАРОВ

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры автоматики и телемеханики)

В настоящее время уделяется значительное внимание вопросам приближения трансцендентных передаточных функций дробно-рациональными выражениями, удобными для моделирования с помощью аналоговых вычислительных машин (АВМ). Такие передаточные функции появляются при описании объектов регулирования, имеющих распределенные параметры [1, 2, 6]. В частности, в ряде случаев получают передаточную функцию вида

$$W(p) = \frac{e^{-\frac{\alpha}{p+\beta}}}{p+\beta}. \qquad (1)$$

Импульсная характеристика приведенной передаточной функции содержит функцию Бесселя

$$h(t) = e^{-\beta t} \cdot I_0(2\sqrt{\alpha t}). \qquad (2)$$

Передаточные функции вида (1) не могут быть непосредственно использованы при исследовании систем автоматического регулирования на аналоговых вычислительных машинах. Необходимо приблизить (1) дробно-рациональным выражением, удобным для моделирования. Наиболее эффективные разложения получают при использовании цепных дробей и при разложении динамических характеристик по системам ортогональных функций [3]. Второй из этих подходов не получил пока достаточного распространения, хотя получены уже значительные результаты [3, 4].

В данной работе рассматривается аппроксимация динамической характеристики (2) экспоненциальными полиномами Чебышева $T_n^*(t)$ с целью приближения передаточной функции (1) удобным для моделирования выражением. Экспоненциальные полиномы Чебышева 1 рода $T_n^*(t)$ имеют вид [5]

$$T_0^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$T_n^*(t) = (-1)^n \cdot n \cdot \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{(-1)^\kappa 2^{2\kappa}(n+\kappa-1)!}{(n-\kappa)!\,(2\kappa)!} e^{-\kappa a t}.$$

Полиномы $T_n^*(t)$ весьма удобны для аппроксимации динамических характеристик различных теплообменных аппаратов, так как большинство процессов, например, теплообмена носит монотонный или апериодический характер при подаче на вход ступенчатого воздействия [6]. Однако процессы, соответствующие передаточной функции (1), не относятся к указанному большинству. Действительно, при малых значениях параметра β импульсная и переходная характеристики имеют колебательный характер с увеличивающимся периодом колебаний. Таким образом, передаточная функция (1) является одной из наиболее трудных с точки зрения приближения ее динамических характеристик полиномами $T_n^*(t)$.

Будем считать, что импульсная характеристика $h(t)$ может быть представлена рядом

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n^*(t). \tag{3}$$

Коэффициенты разложения b_n есть коэффициенты Фурье, которые приближенно можно определить методом интерполирования. Ограничивая ряд (3) первыми 18 членами, выберем узлами интерполирования нули первого из отброшенных полиномов $T_n^*(t)$, т. е. $T_{18}^*(t)$. Нули заданы в виде $at_i = d_i$, где a — некоторый параметр, который примем равным 0,1 (выбор этого параметра будет обоснован ниже). Значения нескольких первых и последних нулей даны в табл. 1.

Таблица 1

d_1	d_2	d_3	d_4	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{17}	d_{18}
0,0019	0,0172	0,0480	0,0948	1,9211	2,4032	3,0609	4,0724	6,2645

Естественно, что аппроксимировать функцию Бесселя на всем интервале $[0, \infty]$ не представляется возможным. Поэтому выберем показатель затухания $\beta = 0{,}02$, тогда интервал существенных значений функции $h(t)$ ограничивается величиной

$$z_{\text{макс}} = 2\sqrt{\alpha t} = 13{,}32 \tag{4}$$

(при ошибке на конце интервала $h(t_{\text{макс}}) = 0{,}06$). Отсюда $\alpha = 0{,}708$.

Определив значение функции $h(t)$ в точках t_i и выполнив интерполирование, найдем значения коэффициентов b_n. Значения нескольких первых коэффициентов даны в табл. 2.

Таблица 2

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
0,2461	0,1728	0,3908	0,2895	−0,0267	−0,0470	0,0444	−0,0361

Ограничивая ряд (3) числом членов $m+1$ и записывая полиномы $T_n^*(t)$ в явном виде, получаем

$$h(t) = \sum_{n=0}^{m} A_n e^{-nat}, \tag{5}$$

где A_n — линейные комбинации коэффициентов b_n. Следует учесть, что число членов отрезка ряда (5) $m+1$ должно быть меньше 12—14 из-за значительной методической погрешности вычисления последних коэффициентов b_n. Значения коэффициентов A_n при $m=4$ даны в табл. 3.

Таблица 3

m \ A_n	A_1	A_2	A_3	A_4
4	3,283	—15,041	16,100	—3,419

В таблице не указан коэффициент A_0, так как он должен быть равен нулю по условию $h(\infty)=0$. Тогда

$$h(t) \approx \sum_{n=1}^{m} A_n \cdot e^{-nat}.$$

Преобразуя это приближенное равенство по Лапласу, имеем

$$W(p) \approx \sum_{n=1}^{m} \frac{A_n}{p+na} = W_1(p).$$

Такую передаточную функцию нетрудно реализовать с помощью пассивных цепей и операционных усилителей [8]. С этой целью функцию $W_1(p)$ представим в следующей форме:

$$W_1(p) = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{m}\frac{A_n}{n} - \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{m}\frac{A_n}{n}\,\frac{p}{p+na}. \qquad (6)$$

Положив $a = 1/RC$, можно найти величины сопротивлений и емкостей схемы. В результате получаем устройство для воспроизведения динамических характеристик, соответствующих передаточной функции (1).

Из изложенного выше видно, что наибольшие трудности связаны с нахождением значений коэффициентов A_n. Поэтому необходимо найти пути сохранения значений этих коэффициентов неизменными при изменении параметров передаточной функции. Рассмотрим два случая.

1. Пусть параметр β принимает некоторое значение $\beta = \beta_1 + 0{,}02$. В этом случае из равенства (2) и (4) имеем

$$h(t) = e^{-\beta_1 t}\cdot e^{-0{,}02t}\cdot I_0(2\sqrt{\alpha t}) \approx \sum_{n=1}^{m} A_n \cdot e^{-(\beta_1+na)\,t}.$$

Используя преобразование Лапласа, получим аппроксимирующую передаточную функцию, подобную (6)

$$W(p) \approx \sum_{n=1}^{m}\frac{A_n}{\beta_1+na} - \sum_{n=1}^{m}\frac{A_n}{\beta_1+na}\cdot\frac{p}{p+(\beta_1+na)}. \qquad (7)$$

Нетрудно воспользоваться прежней схемой, где коэффициенты остаются неизменными. При $0 \leqslant \beta \leqslant 0{,}02$ в формуле (7) достаточно заменить β на $-\beta$.

2. Пусть изменилось значение параметра α. Тогда, решая совместно уравнения

$$z_{\text{макс}} = 2\sqrt{\alpha t_{\text{макс}}} \quad \text{и} \quad a t_{\text{макс}} = d_{\text{макс}}$$

при $z_{\text{макс}} = 13{,}32$ и $d_{\text{макс}} = 6{,}264$, получаем $a = 0{,}141\alpha$.

Выбрав максимальные значения емкости и сопротивления $C_{макс} = 10$ *мкф* и $R_{макс} = 1$ *мгом* соответственно, получаем неравенство

$$\beta_1 + a = \frac{1}{RC} \geqslant 0{,}1. \qquad (8)$$

Итак, если условие (8) выполняется, то при моделировании передаточной функции (1) можно использовать уже найденные коэффициенты A_n.

Расчеты, выполненные на ЭЦВМ М-20, показывают, что погрешность аппроксимации функции $h(t)$ не превышает 10% на всем интервале времени $[0, \infty]$. Грубая оценка погрешности аппроксимации может быть произведена по величине модуля коэффициента b_{m+1} [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Девятов. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. Изд-во СО АН СССР, 1964.
2. Б. Г. Волик. Динамические характеристики трубопровода, входящего в контур регулирования. Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 3, 1965.
3. М. К. Чернышев. Синтез одного класса трансцендентных передаточных функций при помощи решающих элементов аналоговых вычислительных машин. Автоматика и телемеханика, № 7, 1966.
4. А. Ф. Верлань, В. Ф. Евдокимов. Об аппроксимации передаточных функций при моделировании объектов с распределенными параметрами. В сб.: «Методы математического моделирования и теория электрических цепей», выпуск 3, изд-во КДНТП, Киев, 1967.
5. В. М. Осипов. Экспоненциальные полиномы и разложение некоторых типовых сигналов. Изв. ТПИ, т. 180, (в печати).
6. А. А. Шевяков, Р. В. Яковлева. Инженерные методы расчета динамики теплообменных аппаратов. Машиностроение, М., 1968.
7. В. М. Осипов. Приближение функции времени методом интерполирования. Изв. ТПИ, т. 191, Томск, 1969.
8. В. М. Осипов, В. И. Гончаров. Устройство для воспроизведения запаздывания. Авт. свидетельство № 249077. Бюлл. изобретений, № 24, 1969.
9. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. ФМ, 1961.