

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

В. М. ОСИПОВ, В. И. ГОНЧАРОВ

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры автоматики и телемеханики)

### Введение

При создании блоков постоянного запаздывания стремятся получить их частотные характеристики, близкие к частотным характеристикам идеального звена запаздывания. С этой целью передаточная функция идеального звена запаздывания  $e^{-p\tau}$  аппроксимируется каким-либо дробно-рациональным выражением [1, 2].

В настоящей работе предлагается аппроксимировать не передаточную функцию звена запаздывания, а его временные динамические характеристики. Такой подход, с нашей точки зрения, больше соответствует существу вопроса. На возможность аппроксимации временных характеристик звена запаздывания с помощью ортогональных систем функций указано в работе [3]. Ниже рассматриваются вопросы приближения импульсной  $h(t)$  и переходной характеристик звена отрезком ортогонального разложения по интегральным полиномам Лежандра.

В работе [4] рассматриваются интегральные полиномы Лежандра с экспоненциальным аргументом (интегральные  $e$ -полиномы Лежандра), которые образуют полную ортогональную систему функций на интервале  $[0, \infty]$  с весом  $1/1 - e^{-at}$ . То обстоятельство, что эти полиномы обращаются в нуль на границах интервала, делает их более предпочтительными для аппроксимации функций времени по сравнению с обычными  $e$ -полиномами Лежандра.

### Аппроксимация импульсной характеристики

Предположим, что импульсная реакция идеального звена запаздывания может быть представлена в виде разложения по интегральным  $e$ -полиномам Лежандра  $V_n^*(t)$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$h(t) = \delta(t - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n V_n^*(t), \quad (2-1)$$

где  $\tau$  — время запаздывания, а  $V_n^*(t)$  имеет представление [4]

$$V_n^*(t) = \frac{e^{-at}(1 - e^{-at})}{n(n+1)} \sum_{\kappa=0}^{n-1} (-1)^\kappa \frac{(n+\kappa+1)!}{(n-\kappa-1)! \kappa! (\kappa+1)!} e^{-\kappa at}.$$



Очевидно, что

$$h(0) = h(\infty) = 0.$$

Согласно [4], коэффициенты разложения  $C_n$  определяются формулой

$$C_n = n(n+1)(2n+1)a \int_0^{\infty} \delta(t-\tau) \frac{V_n^*(t)}{1-e^{-a\tau}} dt.$$

Учитывая фильтрующее свойство  $\delta$ -функции, получим более простое выражение для определения коэффициентов разложения  $C_n$

$$C_n = n(n+1)(2n+1) \frac{V_n^*(\tau)}{1-e^{-a\tau}}.$$

Для нескольких первых значений  $n$  получим:

$$\begin{aligned} C_1 &= 6e^{-a\tau} \cdot a, \\ C_2 &= 3e^{-a\tau}(1-2e^{-a\tau}) \cdot a, \\ C_3 &= 84e^{-a\tau}(1-5e^{-a\tau}+5e^{-2a\tau}) \cdot a, \\ C_4 &= 180e^{-a\tau}(1-9e^{-a\tau}+21e^{-2a\tau}-14e^{-3a\tau}) \cdot a. \end{aligned} \quad (2-2)$$

Для определения численных значений коэффициентов  $C_n$  ограничимся первыми  $m$  членами разложения (2-1) и найдем значение параметра  $a\tau$  из условия

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \frac{e^{-p\tau}}{p} = 1 = \sum_{n=1}^m C_n \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{V_n(p)}{p} = \sum_{n=1}^m C_n V_n(0). \quad (2-3)$$

Операторные изображения полиномов  $V_n(p)$  можно найти по формуле [4]

$$V_n(p) = a \frac{(a-p) \cdot (2a-p) \cdot \dots \cdot [(n-1) \cdot a - p]}{(a+p) \cdot (2a+p) \cdot \dots \cdot [(n+1) + p]}.$$

Тогда при  $p \rightarrow 0$ .

$$V_n(0) = \frac{1}{n(n+1)a}, \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

а условие (2-3) можно записать в форме

$$a = \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{6} C_2 + \frac{1}{12} C_3 + \dots + \frac{C_n}{n(n+1)} + \dots + \frac{C_m}{m(m+1)}.$$

Подставляя в последнее равенство выражения для  $C_n$  и вводя обозначения  $x = e^{-a\tau}$ , получим уравнение степени  $m$  относительно  $x$ . Например, при  $m=5$  получаем уравнение

$$465x^5 - 1050x^4 + 840x^3 - 280x^2 + 35x - 1 = 0, \quad (2-4)$$

тогда параметр  $a\tau$  найдется из уравнения

$$-a\tau = \ln x_0,$$

где  $x_0$  — один из вещественных корней уравнения (2-4).

Численные значения коэффициентов разложения будут найдены после подстановки значения параметра  $a\tau$  в выражения (2-2).

Так как точная реализация разложения (2-1) невозможна, ограничимся первыми  $m$  членами, т. е.

$$h(t) \approx \sum_{n=1}^m C_n V_n^*(t),$$



и найдем некоторые временные и частотные характеристики, соответствующие этому разложению. С этой целью в последнем равенстве сгруппируем члены с одинаковыми сомножителями  $e^{-nat}$

$$h(t) \approx \sum_{n=1}^{m+1} B_n e^{-nat}. \quad (2-5)$$

Заметим, что коэффициенты  $B_n$  являются линейными комбинациями коэффициентов  $C_n$ . Так как  $h(t)$  есть импульсная реакция идеального звена запаздывания  $e^{-p\tau}$ , то можем найти аппроксимированную передаточную функцию  $W_\tau(p)$

$$h(t) \doteq e^{-p\tau} \approx \sum_{n=1}^{m+1} B_n \cdot \frac{1}{p+na} = W_\tau(p). \quad (2-6)$$

Переходная характеристика устройства, имеющего передаточную функцию  $W_\tau(p)$ , может быть найдена как реакция устройства на единичное ступенчатое воздействие  $x_{bx}(p) = \frac{1}{p}$

$$k(t) \doteq \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{m+1} \frac{B_n}{p+na} = \sum_{n=1}^{m+1} \frac{B_n}{p \cdot na} = \sum_{n=1}^{m+1} \frac{B_n}{na} \cdot \frac{1}{p+na}.$$

На основании условия (2-3) можем полагать, что

$$\sum_{n=1}^{m+1} \frac{B_n}{na} = 1. \quad (2-7)$$

Тогда, обозначив

$$\frac{B_n}{na} = A_n$$

и выполнив обратное преобразование Лапласа, получим

$$k(t) = 1 - \sum_{n=1}^{m+1} A_n e^{-nat}. \quad (2-8)$$

Учитывая условие (2-7), передаточную функцию можно представить в виде, более удобном для реализации

$$W_\tau(p) = 1 - \sum_{n=1}^{m+1} A_n \frac{p}{p+na}. \quad (2-9)$$

Вещественная  $U(\omega)$  и мнимая  $V(\omega)$  частотные характеристики, соответствующие (2-9), имеют вид

$$U(\omega) = \sum_{n=1}^{m+1} \frac{A_n \cdot n}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + n^2}; \quad V(\omega) = -\frac{\omega}{a} \sum_{n=1}^{m+1} \frac{A_n \cdot n}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + n^2}.$$

Как было сказано выше, для нахождения параметра  $a\tau$  нужно решить уравнение степени  $m$ , которое дает  $m$  корней. От выбора того или иного вещественного корня будут зависеть значения коэффициентов разложения  $C_n$  и, следовательно, значения коэффициентов  $B_n$  и  $A_n$ . При этом, видимо, будет меняться и точность аппроксимации функции  $h(t)$ . Для примера рассмотрим переходные характеристики устройства запаздывания, реализующего передаточную функцию (2-9), по которым более просто можно оценить точность аппроксимации. На рис. 1



приведены переходные характеристики  $k(t)$  при  $m=3$ ,  $\tau=1$  сек и различных значениях  $x$ . Нетрудно убедиться, что наименьшая ошибка аппроксимации будет при  $x_1$ , т. е. при наименьшем корне. При других  $m$

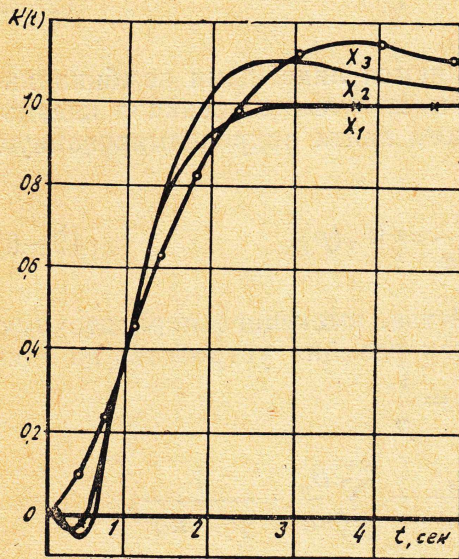


Рис. 1

меньшая ошибка аппроксимации также соответствует корню, имеющему наименьшее значение.

Точность аппроксимации будет увеличиваться с увеличением числа членов разложения  $m$ . Но при этом возрастают абсолютные значения коэффициентов  $A_n$ . В таблице даны значения коэффициентов  $A_n$  и параметра  $a\tau$  для  $m=3, 4, 5$ .

Для реализации передаточной функции (2—9) может быть использована схема, приведенная в [5], если выполнить соотношение

$$a = \frac{1}{RC}.$$

Тогда параметры дифференцирующих  $RC$ -цепей находятся по формуле

$$RC = \frac{n\tau}{(a\tau)},$$

где  $(a\tau)$  — параметр, зависящий от числа членов разложения,  
 $\tau$  — время запаздывания,  
 $n$  — номер дифференцирующей  $RC$ -цепи.

Выставление коэффициентов  $A_n$  может быть произведено по методике, предложенной в [5].

Таблица 1

$m \backslash A_n$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$a\tau$
3	7,156	-16,858	16,249	-5,547	0	0	2,424
4	11,033	-41,330	69,428	-54,022	15,885	0	2,863
5	15,787	-85,883	218,692	-287,605	186,734	-48,391	3,220

Для сравнения с известными устройствами запаздывания на рис. 1 даны переходные характеристики  $k(t)$ , вычисленные по формуле (2—8). На рис. 2 показаны графики переходных характеристик при  $m=3, 5$ .

Выше уже отмечалось, что приближение к передаточной функции идеального звена запаздывания  $e^{-p\tau}$  осуществляется, если судить по опубликованным работам, только в комплексной области. Видимо, такой подход не является лучшим. На рис. 3, а, б представлены амплитудная  $|W\tau(j\omega)|$  и фазовая  $\varphi(\omega)$  частотные характеристики, соответствующие передаточной функции (2—9). Обе характеристики даже при малых значениях частоты ( $\omega$ ) сильно отличаются от частотных характеристик идеального звена запаздывания

$$|W(j\omega)| = 1 \quad \varphi(\omega) = -\omega\tau,$$



хотя переходная характеристика (рис. 2) сравнима с переходными характеристиками известных устройств запаздывания [1, 2, 8]

### Аппроксимация переходной характеристики

Так как значения интегральных  $e$ -полиномов Лежандра при  $t = \infty$  равны нулю, а конечное значение переходной характеристики идеального звена запаздывания  $1(t - \tau)$  равно единице, то непосредственная аппроксимация этими полиномами не дает достаточной точности. Поэтому введем новую функцию  $\varphi(t)$ , значения которой на границах интервала  $[0, \infty]$  равны нулю

$$\varphi(t) = 1(t - \tau) - 1 + e^{-at} \quad (3-1)$$

или

$$\varphi(t) \begin{cases} -1 + e^{-at} & \text{при } t < \tau \\ e^{-at} & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Исследуя полиномы  $V_n^*(t)$ , нетрудно убедиться, что удовлетворительная аппроксимация функции  $\varphi(t)$  будет в том случае, если выполняется равенство

$$e^{-a\tau} \approx 0,5. \quad (3-2)$$

На рис. 4 показан график функции  $\varphi(t)$  при таком условии. Разложение функции  $\varphi(t)$  имеет вид

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot V_n^*(t)$$

или, ограничиваясь первыми  $m$  членами разложения,

$$\varphi(t) \approx f(t) = \sum_{n=1}^m C_n V_n^*(t) = \sum_{n=1}^{m+1} A_n e^{-nat}. \quad (3-3)$$

Тогда переходную характеристику звена запаздывания  $1(t - \tau)$  на основании равенства (3-1) можно представить в следующем виде:

$$1(t - \tau) \approx 1 - e^{-at} + \sum_{n=1}^{m+1} A_n e^{-nat}. \quad (3-4)$$

В выражении (3-3)  $C_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ) есть коэффициенты Фурье. Они могут быть найдены по общей формуле [4]. Для нескольких первых  $n$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 3(2e^{-a\tau} - 1) \\ C_2 &= 5(6e^{-a\tau} - 6e^{-2a\tau} - 1) \\ C_3 &= 7(12e^{-a\tau} - 30e^{-2a\tau} + 20e^{-3a\tau} - 1) \\ C_4 &= 9(20e^{-a\tau} - 90e^{-2a\tau} + 140e^{-3a\tau} - 70e^{-4a\tau} - 1) \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

Подставляя в равенство (3-5) значение параметра  $a\tau$ , найденное из условия (3-2), получаем численные значения коэффициентов разложения  $C_n$ .

$$C_1 = 0; C_2 = 2,5; C_3 = 0; C_4 = 3,375, \dots$$

Определить численные значения коэффициентов  $A_n$  для любого  $m$  также не представляет трудностей.

Найдем передаточную функцию, соответствующую разложению (3-4). Преобразуя по Лапласу (3-4), будем иметь



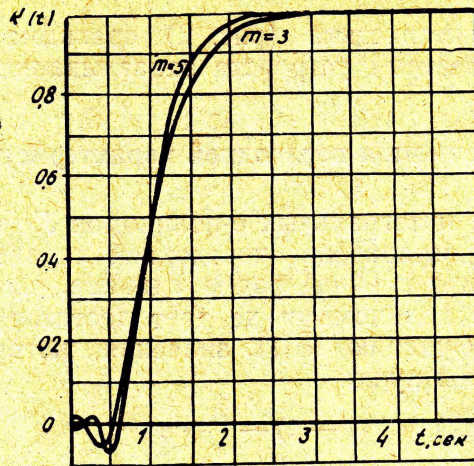


Рис. 2

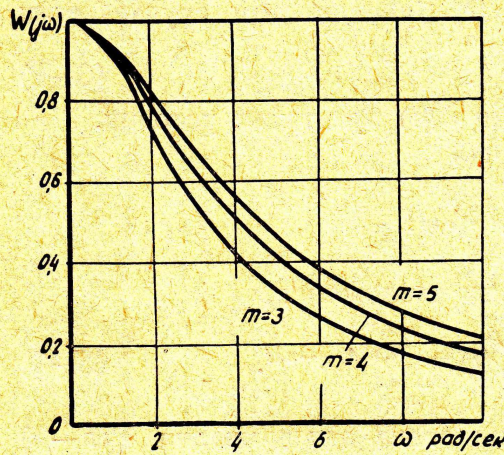


Рис. 3, а

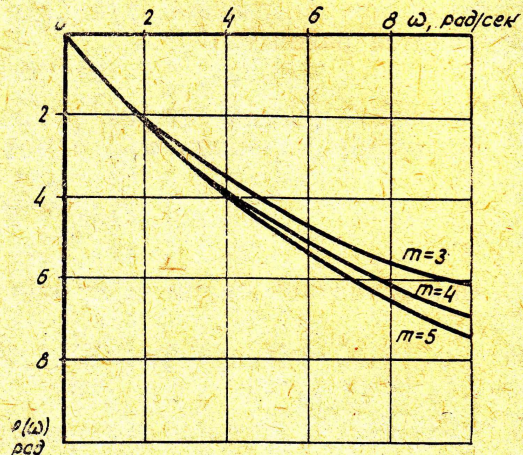


Рис. 3, б

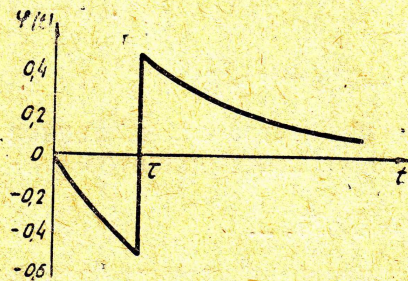


Рис. 4

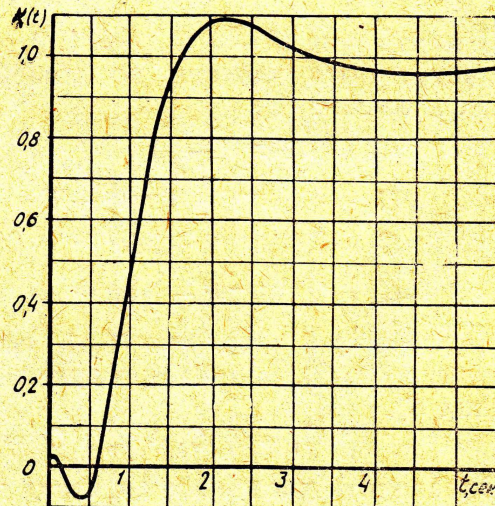


Рис. 5



$$\frac{e^{-p\tau}}{p} \approx \frac{1}{p} \approx \frac{A_1'}{p+a} + \sum_{n=2}^{m+1} \frac{A_n}{p+na},$$

где  $A_1' = A_1 - 1$ . Из последнего равенства находим выражение для передаточной функции

$$e^{-p\tau} \approx W_{\tau}(p) = 1 + \frac{A_1'p}{p+a} + \sum_{n=1}^{m+1} \frac{A_n p}{p+na}. \quad (3-6)$$

Частотные характеристики, соответствующие (3—6), мало отличаются от характеристик, приведенных на рис. 3.

На рис. 5 показана переходная характеристика, вычисленная по формуле (3—4) для  $m = 4$ . Сравнение этой характеристики с переходной характеристикой, представленной на рис. 2, оказывается не в пользу первой. Однако это не свидетельствует о меньших возможностях данного метода синтеза передаточной функции устройства запаздывания по сравнению с аппроксимацией импульсной характеристики. Дело в том, что условие (3—2) принято только на основании сравнения графиков функции  $\varphi(t)$  и полиномов  $V_n^*(t)$ , т. е. несколько произвольно.

Поэтому существует такое значение параметра  $a\tau$ , при котором, например, интегральная квадратичная ошибка

$$\int_0^{\infty} [1(t-\tau) - \kappa(t)]^2 dt$$

будет минимальной. Необходимые расчеты нетрудно выполнить на ЭЦВМ.

В заключение заметим, что предложенный способ моделирования запаздывания дает приемлемую точность и может быть использован при решении некоторых задач на АВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Догановский, В. А. Иванов. Устройства запаздывания и их применение в автоматических системах. М., «Машиностроение», 1966.
2. Я. И. Гриня. Методы и средства воспроизведения запаздывания в аналоговой вычислительной технике. «Аналоговая и аналого-цифровая вычислительная техника». М., Машиностроение, 1965.
3. М. К. Чернышев. Синтез одного класса трансцендентных передаточных функций при помощи решающих элементов аналоговых вычислительных машин. Автоматика и телемеханика, № 7, 1966.
4. В. М. Осипов. К вопросу о приближенном обращении Лапласа. Изв. ТПИ, т. 191, 1969.
5. В. М. Осипов, В. И. Гончаров. Устройство для воспроизведения запаздывания. Авторское свидетельство № 249077. Бюлл. изобретений, № 24, 1969.
6. В. Н. Жовинский. Схемы запоминания напряжений и блоки запаздывания. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.