ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 225 1972

К ВОПРОСУ ОБ ОХЛАЖДЕНИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИЕЙ

Л. И. КУДРЯШЕВ, В. В. БАНЮХА

Предлагается приближенный метод решения системы уравнений, описывающий процесс охлаждения горизонтального бесконечно длинного цилиндра в условиях нестационарной естественной конвекции. Теплофизические характеристики тела и среды полагаются независимыми от температуры.

Большой практический интерес представляют случаи, когда температура среды постоянна, а внесенное в нее тело имеет в начальный момент времени температуру, заметно от нее отличающуюся. Температура тела при этом будет асимптотически приближаться к температуре среды. Этот случай так называемого «простого» охлаждения цилиндра, который наряду со сферой и пластиной является элементарной формой поверхности теплообменных аппаратов, был нами использован для определения закономерностей поведения коэффициента теплообмена в условиях нестационарной естественной конвекции.

Задача имеет следующую математическую формулировку:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0, \qquad (a)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \bar{\nu} \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + g \frac{t - t_\infty}{t_\infty} \cdot \sin\beta, \qquad (b)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + \bar{a} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}, \qquad (c) \qquad (1)$$

$$- c_{\text{рм}} \rho_{\text{м}} \frac{D}{4} \frac{\partial t_w}{\partial \tau} = \alpha (t_w - t_\infty). \qquad (d)$$

При использовании области влияния „Δ“ полагается $w_y = 0$. Если введем безразмерную температуру, определенную выражением

$$\Theta = \frac{t - t_\infty}{t_{W,\max} - t_\infty}, \qquad (2)$$

тогда система (1) будет иметь вид:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = 0, \qquad (a)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + g \frac{t_{W,\max} - t_\infty}{t_\infty} \cdot \Theta \sin\beta, \qquad (b)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial \Theta}{\partial x} = a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}, \qquad (c) \qquad (3)$$

$$-c_{\text{рм}} \rho_{\text{м}} \frac{D}{4} \frac{d\Theta_W}{d\tau} = \alpha \Theta_W, \qquad (d)$$

где

$$\Theta_w = \frac{t_w - t_\infty}{t_{w,\max} - t_\infty}. \qquad (4)$$

Уравнение (3*b*) принадлежит к классу неоднородных линейных. Оно решается при следующих начальных и граничных условиях:

$$\text{при } \tau = 0 \qquad w_x = 0, \qquad (a)$$

$$y = 0 \qquad w_x = 0, \qquad (b) \qquad (5)$$

$$y = \Delta \qquad w_x = 0. \qquad (c)$$

Решение уравнения (3*b*) при граничных условиях (5) известно [1] и имеет вид

$$w_x(y, \tau) = \frac{2}{\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\left(\frac{n\pi\nu}{\Delta}\right)^2 (\tau - \varepsilon)} \int_0^{\Delta} g \frac{t_{w,\max} - t_\infty}{t_\infty} \Theta(\varepsilon) \sin\beta \, d\varepsilon \right\} \sin\left(\frac{n\pi y}{\Delta}\right). \qquad (6)$$

Однако его использование в дальнейшем затруднительно. Ниже предлагается схема упрощенного решения задачи. Решение уравнения (3*b*) будем искать в виде функции, удовлетворяющей как начальному, так и граничному условиям (5):

$$w_x = g \frac{t_{w,\max} - t_\infty}{2 t_\infty \nu} \Delta^2 (\eta - \eta^2) \Theta \sin\beta, \qquad (7)$$

где $\eta = \dfrac{y}{\Delta}$.

При таком выборе функции (7) начальное и граничное условия (5) выполняются сами собой. Нетрудно видеть, что функция (7) может быть получена при решении уравнения (3*b*), если в нем положить $\dfrac{\partial w_x}{\partial \tau} = 0$, т. е. считать развитие процесса квазистационарным. Это вполне допустимо в отношении физического смысла, поскольку развитие процесса движения около тела при свободной конвекции во времени происходит достаточно медленно. Уравнение (7) можно записать иначе:

$$w_x = \frac{1}{2} Gr \left(\frac{\Delta}{D}\right)^2 \frac{\nu}{D} \Theta \sin\beta (\eta - \eta^2), \qquad (8)$$

где

$$Gr = \frac{g D^3}{\nu^2} \cdot \frac{t_{w,\max} - t_\infty}{t_\infty}, \qquad (9)$$

или

$$Re_x = \frac{w_x D}{\nu} = \frac{1}{2} Gr \left(\frac{\Delta}{D}\right)^2 \Theta \sin\beta (\eta - \eta^2). \qquad (10)$$

Далее, уравнение ($3c$), имея в виду ($3a$), можно записать

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial x}(w_x\cdot\Theta)=a\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}. \qquad (11)$$

Или в безразмерном виде

$$\frac{\partial\Theta}{\partial Fo}+2\frac{\partial}{\partial\beta}(Pe_x\cdot\Theta)=\frac{\partial^2\Theta}{\partial y_1^2}, \qquad (12)$$

где

$$Fo=\frac{a\tau}{D^2},\quad Pe_x=\frac{w_x D}{a},\quad y_1=\frac{y}{D}.$$

Если иметь в виду, что $x=\frac{D}{2}\sin\beta$, а $dx=\frac{D}{2}d\beta$ (для малых углов $\sin\beta\approx\beta$), тогда, внося в (12) выражение (10), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial Fo}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[(Gr\cdot Pr)(\eta-\eta^2)\sin\beta\left(\frac{\Delta}{D}\right)^2\Theta^2\right]=\frac{\partial^2\Theta}{\partial y_1^2}. \qquad (13)$$

Полученное уравнение является нелинейным относительно „Θ“ следовательно, решить его обычными аналитическими методами не представляется возможным.

Ниже приводится предложенная Н. Л. Меньших [2] рациональная линеаризация уравнения (13), которая с достаточной точностью аппроксимирует действительный результат.

Будем аппроксимировать

$$\Theta^2=B\cdot\Theta. \qquad (14)$$

Найдем коэффициент B из условия минимума функционала

$$\delta\int_0^1(\Theta^2-B\Theta)^2\cdot d\Theta=0, \qquad (15)$$

откуда находим

$$B=\frac{3}{4}. \qquad (16)$$

Внося (14) в (13) и учитывая (16), будем иметь

$$\frac{\partial\Theta}{\partial Fo}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{3}{4}(Gr\cdot Pr)(\eta-\eta^2)\sin\beta\cdot\Theta\cdot\left(\frac{\Delta}{D}\right)^2\right]=\frac{\partial^2\Theta}{\partial y_1^2}. \qquad (17)$$

Решение уравнения (17) при начальных и граничных условиях

$$Fo=0,\ \Theta=0;\quad \eta=0,\ \Theta=\Theta_w;\quad \eta=1,\ \Theta=0; \qquad (18)$$

будем искать в виде суммы

$$\Theta=\Theta_1(y_1,\beta)+\Theta_2(Fo,y_1). \qquad (19)$$

При подстановке (19) уравнение (17) распадается на два следующих:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{3}{4}(Gr\cdot Pr)(\eta-\eta^2)\left(\frac{\Delta}{D}\right)^2\sin\beta\,\Theta_1\right]=\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial y_1^2}, \qquad (20)$$

$$\frac{\partial\Theta_2}{\partial Fo}=\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial y_1^2}. \qquad (21)$$

Уравнение (20) решается при следующих условиях:

$$Fo \geqslant 0,\ \eta = 0,\ \Theta_1 = 1;\ \eta = 1,\ \Theta_1 = 0; \tag{22}$$

а уравнение (21) при условиях:

$$\eta = 0,\ \Theta_2 = 0;\ \eta = 1,\ \Theta_2 = 0. \tag{23}$$

Проинтегрируем обе части выражения (20) и, перейдя в правой части к переменной η, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\int\limits_0^1\left[\frac{3}{4}(Gr\cdot Pr)(\eta-\eta^2)\left(\frac{\Delta}{D}\right)^2\sin\beta\cdot\Theta_1\right]d\eta = -\frac{D^2}{\Delta^2}\frac{\partial\Theta_1}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}. \tag{24}$$

Граничные условия (22) в первом приближении удовлетворяются, если для Θ_1 выбрать аппроксимирующую функцию

$$\Theta_1 = \Theta_w(1-\eta). \tag{25}$$

Вносят (25) в (24), приходим к следующему выражению:

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\Delta}{D}\right)^4\sin\beta + \left(\frac{\Delta}{D}\right)^4\cos\beta = \frac{48}{3}\,\frac{1}{Gr\cdot Pr}. \tag{26}$$

Полагая в этом уравнении $\beta = 0$, найдем значение $\left(\frac{\Delta_0}{D}\right)$ в передней критической точке разветвления:

$$\frac{\Delta_0}{D} = \sqrt[4]{\frac{16}{Gr\cdot Pr}}. \tag{27}$$

Учитывая (27), уравнение (26) можем записать в виде

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^4 + \left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^4\operatorname{ctg}\beta - \frac{1}{\sin\beta} = 0. \tag{28}$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^4 = \frac{1}{\sin\beta}(C+\beta). \tag{29}$$

Поскольку при $\beta = 0$, $\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^4 = 1$, то $C = 0$.

Следовательно, имеем

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^4 = \frac{\beta}{\sin\beta},$$

откуда

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \sqrt[4]{\frac{\beta}{\sin\beta}}. \tag{30}$$

Для сопоставления полученных результатов использования области теплового влияния с имеющимися опытными данными для стационарного режима найдем

$$Nu_\infty = \frac{D}{\Delta}. \tag{31}$$

Вносят (30) в (31) и учитывая (27), будем иметь

$$Nu = 0{,}5\sqrt[4]{Gr\cdot Pr}\,\sqrt[4]{\frac{\sin\beta}{\beta}}, \tag{32}$$

а среднее значение

$$\overline{Nu} = \frac{0{,}5\sqrt[4]{Gr \cdot Pr}}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\sin \beta}{\beta}}\, d\beta \tag{33}$$

Считая теперь область влияния „Δ“ известной, решим уравнение (21) при граничных условиях (23).

Проинтегрируем уравнение (21), перейдя одновременно к переменной η в правой части

$$\frac{d}{dFo} \int_0^1 \Theta_2 \cdot d\eta = -\left(\frac{D}{\Delta}\right)^2 \left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}. \tag{34}$$

Или, осредняя по „β“, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^1 \Theta_2 \cdot d\eta = -\left(\frac{\overline{D}}{\Delta}\right)^2 \left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}, \tag{35}$$

где

$$\left(\frac{\overline{D}}{\Delta}\right)^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{D}{\Delta}\right)^2 d\beta.$$

Выразим последнее соотношение, имея в виду (30) и (27),

$$\left(\frac{\overline{D}}{\Delta}\right)^2 = \frac{0{,}25}{\pi} \sqrt{Gr \cdot Pr} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\sin \beta}{\beta}}\, d\beta, \tag{36}$$

Граничным условиям (23) соответствует простейший полином вида

$$\Theta_2 = C(\eta - \eta^2). \tag{37}$$

Внося (37) в (35), приходим к дифференциальному уравнению относительно C

$$\frac{dC}{dFo} = -6\bar{\delta}^2 \cdot C, \tag{38}$$

где для краткости записи обозначено

$$\bar{\delta}^2 = \left(\frac{\overline{D}}{\Delta}\right)^2. \tag{39}$$

Интегрируя, получим

$$C = C_0 \exp\left(-6\bar{\delta}^2 \cdot Fo\right). \tag{40}$$

В соответствии с этим, подставив (40) в (37), получим

$$\Theta_2 = C_0 \exp\left(-6\bar{\delta} \cdot Fo\right)(\eta - \eta^2). \tag{41}$$

Подставляя (25) и (41) в (19), будем иметь

$$\Theta = \Theta_w (1 - \eta) + C_0 (\eta - \eta^2) \exp\left(-6\bar{\delta}^2 \cdot Fo\right). \tag{42}$$

В уравнении (42) неизвестной пока осталась произвольная постоянная C_0. Для ее определения воспользуемся начальным условием:

$$\text{при } Fo = 0,\ \Theta_w = 1,\ \Theta = 0;$$

поэтому

$$0 = (1 - \eta) + C_0 (\eta - \eta^2). \tag{43}$$

Для определения C_0 воспользуемся условием минимума функционала относительно начального условия

$$\delta\int_0^1 \{0-[(1-\eta)+C_0(\eta-\eta^2)]\}^2\,d\eta=0. \qquad (44)$$

Откуда сразу будем иметь

$$C_0=-\frac{5}{2}.$$

Следовательно, окончательное решение будет иметь вид

$$\Theta=\Theta_w(1-\eta)-\frac{5}{2}(\eta-\eta^2)\exp(-6\bar{\delta}^2\,Fo). \qquad (45)$$

Для определения коэффициента теплообмена воспользуемся известным выражением:

$$Nu=-\frac{1}{\Theta_w}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y_1}\right)_{y_1=0};$$

$$Nu=-\frac{1}{\Theta_w}\left(\frac{D}{\Delta}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}=\frac{1}{\Theta_w}\left[\Theta_w+\frac{5}{2}\exp(-6\bar{\delta}^2\,Fo)\right]\frac{D}{\Delta}, \qquad (46)$$

$$Nu=\frac{D}{\Delta}\left[1+\frac{5}{2\Theta_w}\exp(-6\bar{\delta}^2\,Fo)\right]. \qquad (47)$$

Среднее значение:

$$\overline{Nu}=\frac{0{,}5\sqrt[4]{Gr\cdot Pr}}{\pi}\left(\int_0^\pi\sqrt{\frac{\sin\beta\cdot}{\beta}}\,d\beta\right)\cdot\left[1+\frac{5}{2\Theta_w}\exp(-6\bar{\delta}^2\,Fo)\right]. \qquad (48)$$

При $Fo\to\infty$ выражение (48) переходит в (33). Интересно отметить, что при $Fo=0$, из (48) получаем максимальное число $\overline{Nu}$, равное

$$\overline{Nu}_{\max}=\frac{7}{2}\,Nu_\infty. \qquad (49)$$

Уравнение (48) можем записать для дальнейшего в более удобном виде

$$\overline{Nu}=C\,(Gr\cdot Pr)^{0.25}\left[1+\frac{5}{2\Theta_w}\exp(-6\bar{\delta}^2\,Fo)\right]$$

или

$$\overline{Nu}=Nu_\infty\left[1+\frac{5}{2\Theta_w}\exp(-6\bar{\delta}^2\,Fo)\right]. \qquad (50)$$

В этом выражении пока неизвестной является величина Θ_w. Для ее нахождения воспользуемся уравнением ($1d$), которое запишем в безразмерном виде

$$-\frac{d\Theta_w}{dFo}=A\,\overline{Nu}\,\Theta_w, \qquad (51)$$

где

$$A=4\,\frac{C_{p\infty}\,\rho_\infty}{C_{p\text{м}}\,\rho_\text{м}}.$$

Вносся в (51) выражение (50), приходим к следующему уравнению относительно Θ_w:

$$\frac{d\Theta_w}{dFo} + ANu_\infty \left[\Theta_w + \frac{5}{2} \exp(-6\bar{\delta}^2 Fo) \right] = 0, \tag{52}$$

интеграл которого имеет вид

$$\Theta_w = \exp(-ANu_\infty \cdot Fo) \left[C_0 - \frac{5}{2} \int \exp[-6\bar{\delta}^2 - ANu_\infty) Fo]\, dFo \right], \tag{53}$$

откуда, используя начальное условие, согласно которому при $Fo = 0$ $\Theta_w = 1$, окончательно получим

$$\Theta_w = \exp(-ANu_\infty Fo) \left| 1 - \frac{5}{2} \frac{1}{6\bar{\delta}^2 - ANu_\infty} \times \right.$$

$$\left. \times \{1 - \exp[-(6\bar{\delta}^2 - ANu_\infty) Fo]\} \right|. \tag{54}$$

Подставляя (54) в (52), приходим к расчетному уравнению относительно $\overline{Nu}$:

$$\overline{Nu} = \frac{6\bar{\delta}^2}{A} \left[1 + \frac{5}{2\Theta_w} \exp(-6\bar{\delta}^2 Fo) \right].$$

Выводы

Введение области теплового влияния позволило получить расчетные уравнения для коэффициента конвективного теплообмена при охлаждения бесконечно-длинного цилиндра нестационарной естественной конвекцией. В предельном случае переходим к расчетным соотношениям, соответствующим в пределах точности сделанных допущений известным формулам М. А. Михеева для стационарного режима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Изд. «Наука», М., 1959.

2. Л. И. Кудряшев, Н. Л. Меньших. Сопряженная задача о теплообмене при наличии лучистого теплообмена. Изв. вузов, «Авиационная техника», № 1, 1969.