ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 226 1976

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Ю. А. ЗАГРОМОВ, Б. З. ТОКАРЬ, Л. Г. ФУКС, В. Н. ШМАНДИНА

(Представлена профессором Г. И. Фуксом)

При определении коэффициентов тепло- и температуропроводности методом плоского источника постоянной мощности используется решение классической задачи для нагрева полуограниченного тела [1]

$$\vartheta^* = \frac{2q\sqrt{a\tau}}{\lambda} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}, \tag{1}$$

где

ϑ^* — превышение температуры относительно начальной температуры, одинаковой для всех точек тела на расстоянии от источника постоянной мощности; q — плотность теплового потока;

λ, a — соответственно коэффициенты тепло- и температуропроводности.

Обычно в опыте полубесконечное тело имитируется телом конечных размеров в виде стержня с круглым или квадратным сечением. При нагреве такого стержня от боковой поверхности возникает теплоотдача в окружающую среду, искажающая температурное поле стержня. Учет влияния теплоотдачи был проведен в работах [2, 3], используя решение задачи о нагреве полубесконечного цилиндра постоянным тепловым потоком с торца при наличии теплообмена с боковой поверхности. Однако решения, полученные авторами в виде слабосходящихся рядов, очень сложны для практического использования. Кроме того, наличие большого количества переменных величин в решении затрудняет его анализ в аналитической и графической формах.

Как правило, величина вносимой погрешности в обычных случаях невелика. Поэтому представляется возможным ограничиться приближенным решением, которое позволяет, во-первых, с достаточной точностью оценить погрешность, а во-вторых, выбрать такие условия эксперимента, когда погрешностью, возникающей от теплообмена с боковой поверхности, можно пренебречь.

Постановка задачи

Дан полуограниченный стержень, расположенный вдоль оси x. Между боковой поверхностью стержня и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Начальная температура стержня и температура окружающей среды постоянны и равны t_0. В начальный момент $\tau=0$ на границе стержня $x=0$ начинает действовать постоянный тепловой поток $q=\text{const}$. Найти распределение температуры по длине стержня в любой момент времени.

Так как размеры поперечного сечения стержня малы по сравнению с длиной, то можно пренебречь теплопроводностью по сечению $\left(\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial t}{\partial z}\right.$ $\left.=0\right)$, а теплоотдачу с боковой поверхности учесть в самом дифференциальном уравнении в виде отрицательного источника тепла:

$$c\rho\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial\tau}=\lambda\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2}-w;$$

$$(\tau>0,\quad 0\leqslant x<\infty). \tag{2}$$

Здесь w — количество тепла, отдаваемого в окружающую среду единицей объема стержня в единицу времени.

Обозначив площадь сечения стержня S, а периметр сечения P, можно написать

$$w=\alpha\left[t(x,\tau)-t_0\right]\cdot\frac{1}{h}, \tag{3}$$

где

α — коэффициент теплоотдачи,

$h=\frac{S}{p}$ (для цилиндрического стержня радиуса r_0

$h=\frac{1}{2}r_0$; для стержня квадратного сечения со стороной квадрата r_0

$\left.h=\frac{1}{4}r_0\right)$.

После подстановки (3) дифференциальное уравнение запишется как

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial\tau}=a\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{c\rho h}\left[t(x,\tau)-t_0\right] \tag{4}$$

с краевыми условиями

$$t(x,0)=t_0; \tag{5}$$

$$q=-\lambda\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial x}; \tag{6}$$

$$t(\infty,\tau)=t_0;\ \frac{\partial t(\infty,\tau)}{\partial x}=0. \tag{7}$$

Преобразуем по Лапласу систему (4—7) по переменной τ. Дифференциальное уравнение для изображения $T(x,s)$ имеет вид

$$T''(x,s)-\frac{s}{a}T(x,s)+\frac{t_0}{a}-\frac{\alpha}{\lambda h}T(x,s)+\frac{\alpha t_0}{\lambda hs}=0. \tag{8}$$

Граничные условия для изображения

$$T'(0,s)=-\frac{q}{\lambda s}, \tag{9}$$

$$T'(\infty,s)=0. \tag{10}$$

Решение уравнения (8) при условии (10) будет

$$T(x,s)-\frac{t_0}{s}=B\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a}+\frac{\alpha}{\lambda h}}\,x\right). \tag{11}$$

Постоянную B находим из граничного условия (9):

$$B = \frac{q}{\lambda s \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{\alpha}{\lambda h}}},$$

что при подстановке в (11) дает

$$T(x, s) - \frac{t_0}{s} = \frac{q}{\lambda} \frac{1}{s \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{\alpha}{\lambda h}}} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a} + \frac{\alpha}{\lambda h}}\, x\right). \qquad (12)$$

Переходя от изображения к оригиналу, получаем

$$t(x, \tau) - t_0 = \frac{1}{2} \frac{q}{\lambda \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda h}}} \left[\exp\left(-x \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda h}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{\frac{\alpha a}{\lambda h}\tau}\right) - \exp\left(x \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda h}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \sqrt{\frac{\alpha a}{\lambda h}\tau}\right)\right]. \qquad (13)$$

Если принять, что теплоотдача с боковой поверхности стержня отсутствует, т. е. $\alpha = 0$, то выражение (13) переходит в (1).

Решение (13) можно представить в критериальной форме для цилиндрического стержня

$$\vartheta = \frac{q r_0}{\lambda} \frac{1}{2\sqrt{2\mathrm{Bi}}} \left[\exp(-X\sqrt{2\mathrm{Bi}}) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} - \sqrt{2\,\mathrm{BiFo}}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp(X\sqrt{2\mathrm{Bi}}) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} + \sqrt{2\,\mathrm{BiFo}}\right)\right]. \qquad (14)$$

где $\mathrm{Bi} = \frac{\alpha r_0}{\lambda}$ — критерий Био,

$\mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{r_0^2}$ — критерий Фурье,

$X = \frac{x}{r_0}$ — безразмерная координата.

При фиксированных значениях Bi, Fo и X можно определить относительную погрешность эксперимента $\frac{\vartheta^* - \vartheta}{\vartheta}$, вызванную наличием теплоотдачи с боковой поверхности.

По полученному выражению были проведены расчеты и построен график зависимости $\frac{\vartheta^* - \vartheta}{\vartheta}$ от Fo, Bi и X, которыми задавались из условий конкретного эксперимента на теплоизоляционных материалах (рис. 1).

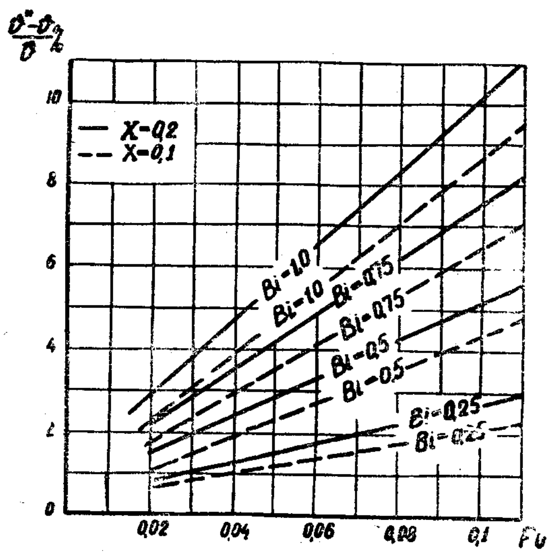

Рис. 1. Зависимость относительной погрешности от Fo, Bi и X

Можно показать, что решение (14) при малых значениях критерия Bi является частным случаем точных решений, данных в [2, 3].

Погрешность, определяемая с использованием (14), при малых значениях Fo незначительно отличается от величины погрешности, рассчитанной по точной зависимости. Пользуясь рис. 1, можно найти границы допустимых значений критериев Fo и Bi, при которых погрешность не превысит допустимых значений. Кроме того, рис. I дает возможность учесть и внести в расчет искажение температурного поля, возникающее из-за теплообмена с боковой поверхности стержня. Кривые Bi = const в области больших Fo достаточно близко совпадают с прямыми, что значительно облегчает линейную интерполяцию по крайней Bi и безразмерному параметру X.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. Изд. «Высшая школа», М., 1967.
2. А Б. Вержинская. ИФЖ, № 7, 1963.
3. В. Н. Шмандина, Л. Г. Фукс. Изв. ТПИ, т. 206, 1970.