

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Ю. А. ЗАГРОМОВ, Б. З. ТОКАРЬ, Л. Г. ФУКС, В. Н. ШМАНДИНА

(Представлена профессором Г. И. Фуком)

При определении коэффициентов тепло- и температуропроводности методом плоского источника постоянной мощности используется решение классической задачи для нагрева полуограниченного тела [1]

$$\vartheta^* = \frac{2q\sqrt{a\tau}}{\lambda} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}, \quad (1)$$

где

ϑ^* — превышение температуры относительно начальной температуры, одинаковой для всех точек тела на расстоянии от источника постоянной мощности; q — плотность теплового потока; λ, a — соответственно коэффициенты тепло- и температуропроводности.

Обычно в опыте полубесконечное тело имитируется телом конечных размеров в виде стержня с круглым или квадратным сечением. При нагреве такого стержня от боковой поверхности возникает теплоотдача в окружающую среду, искажающая температурное поле стержня. Учет влияния теплоотдачи был проведен в работах [2, 3], используя решение задачи о нагреве полубесконечного цилиндра постоянным тепловым потоком с торца при наличии теплообмена с боковой поверхности. Однако решения, полученные авторами в виде слабосходящихся рядов, очень сложны для практического использования. Кроме того, наличие большого количества переменных величин в решении затрудняет его анализ в аналитической и графической формах.

Как правило, величина вносимой погрешности в обычных случаях невелика. Поэтому представляется возможным ограничиться приближенным решением, которое позволяет, во-первых, с достаточной точностью оценить погрешность, а во-вторых, выбрать такие условия эксперимента, когда погрешностью, возникающей от теплообмена с боковой поверхности, можно пренебречь.

Постановка задачи

Дан полуограниченный стержень, расположенный вдоль оси x . Между боковой поверхностью стержня и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Начальная температура стержня и температура окружающей среды постоянны и равны t_0 . В начальный момент $\tau=0$ на границе стержня $x=0$ начинает действовать постоян-

ный тепловой поток $q = \text{const}$. Найти распределение температуры по длине стержня в любой момент времени.

Так как размеры поперечного сечения стержня малы по сравнению с длиной, то можно пренебречь теплопроводностью по сечению ($\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$), а теплоотдачу с боковой поверхности учесть в самом дифференциальном уравнении в виде отрицательного источника тепла:

$$c\rho \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} - w; \quad (\tau > 0, \quad 0 \leq x < \infty). \quad (2)$$

Здесь w — количество тепла, отдаваемого в окружающую среду единицей объема стержня в единицу времени.

Обозначив площадь сечения стержня S , а периметр сечения P , можно написать

$$w = \alpha [t(x, \tau) - t_0] \cdot \frac{1}{h}, \quad (3)$$

где

α — коэффициент теплоотдачи,

$h = \frac{S}{P}$ (для цилиндрического стержня радиуса r_0

$h = \frac{1}{2} r_0$; для стержня квадратного сечения со стороной квадрата r_0

$h = \frac{1}{4} r_0$).

После подстановки (3) дифференциальное уравнение запишется как

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{c\rho h} [t(x, \tau) - t_0] \quad (4)$$

с краевыми условиями

$$t(x, 0) = t_0; \quad (5)$$

$$q = -\lambda \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x}; \quad (6)$$

$$t(\infty, \tau) = t_0; \quad \frac{\partial t(\infty, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Преобразуем по Лапласу систему (4—7) по переменной τ . Дифференциальное уравнение для изображения $T(x, s)$ имеет вид

$$T''(x, s) - \frac{s}{a} T(x, s) + \frac{t_0}{a} - \frac{\alpha}{\lambda h} T(x, s) + \frac{\alpha t_0}{\lambda h s} = 0. \quad (8)$$

Граничные условия для изображения

$$T'(0, s) = -\frac{q}{\lambda s}, \quad (9)$$

$$T'(\infty, s) = 0. \quad (10)$$

Решение уравнения (8) при условии (10) будет

$$T(x, s) - \frac{t_0}{s} = B \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a} + \frac{\alpha}{\lambda h}} x\right). \quad (11)$$

Постоянную B находим из граничного условия (9):

$$B = \frac{q}{\lambda s \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{\alpha}{\lambda h}}},$$

что при подстановке в (11) дает

$$T(x, s) - \frac{t_0}{s} = \frac{q}{\lambda s \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{\alpha}{\lambda h}}} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a} + \frac{\alpha}{\lambda h}} x\right). \quad (12)$$

Переходя от изображения к оригиналу, получаем

$$t(x, \tau) - t_0 = \frac{1}{2} \frac{q}{\lambda \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda h}}} \left[\exp\left(-x \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda h}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \sqrt{\frac{\alpha a}{\lambda h}}\right) - \exp\left(x \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda h}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \sqrt{\frac{\alpha a}{\lambda h}}\right) \right]. \quad (13)$$

Если принять, что теплоотдача с боковой поверхности стержня отсутствует, т. е. $\alpha = 0$, то выражение (13) переходит в (1).

Решение (13) можно представить в критериальной форме для цилиндрического стержня

$$\vartheta = \frac{qr_0}{\lambda} \frac{1}{2\sqrt{2\operatorname{Bi}}} \left[\exp(-X\sqrt{2\operatorname{Bi}}) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\operatorname{Fo}}} - \sqrt{2\operatorname{Bi}\operatorname{Fo}}\right) - \exp(X\sqrt{2\operatorname{Bi}}) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\operatorname{Fo}}} + \sqrt{2\operatorname{Bi}\operatorname{Fo}}\right) \right]. \quad (14)$$

где $\operatorname{Bi} = \frac{\alpha r_0}{\lambda}$ — критерий Био,

$\operatorname{Fo} = \frac{a\tau}{r_0^2}$ — критерий Фурье,

$X = \frac{x}{r_0}$ — безразмерная координата.

При фиксированных значениях Bi , Fo и X можно определить относительную погрешность эксперимента $\frac{\vartheta^* - \vartheta}{\vartheta}$, вызванную наличием теплоотдачи с боковой поверхности.

По полученному выражению были проведены расчеты и построен график зависимости $\frac{\vartheta^* - \vartheta}{\vartheta}$ от Fo , Bi и X , которыми

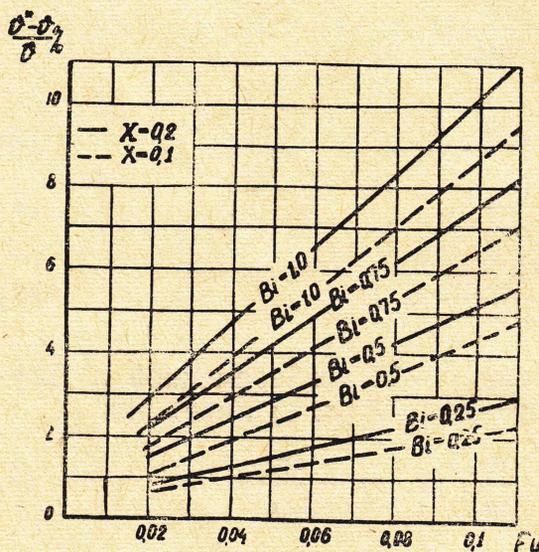


Рис. 1. Зависимость относительной погрешности от Fo , Bi и X

задавались из условий конкретного эксперимента на теплоизоляционных материалах (рис. 1).

Можно показать, что решение (14) при малых значениях критерия Bi является частным случаем точных решений, данных в [2, 3].

Погрешность, определяемая с использованием (14), при малых значениях Fo незначительно отличается от величины погрешности, рассчи-

танной по точной зависимости. Пользуясь рис. 1, можно найти границы допустимых значений критериев Fo и Bi , при которых погрешность не превысит допустимых значений. Кроме того, рис. 1 дает возможность учесть и внести в расчет искажение температурного поля, возникающее из-за теплообмена с боковой поверхности стержня. Кривые $Bi = const$ в области больших Fo достаточно близко совпадают с прямыми, что значительно облегчает линейную интерполяцию по крайней Bi и безразмерному параметру X .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. Изд. «Высшая школа», М., 1967.
 2. А. Б. Вержинская. ИФЖ, № 7, 1963.
 3. В. Н. Шмандина, Л. Г. Фукс. Изв. ТПИ, т. 206, 1970.
-