ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 226 1976

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА Е-ФУНКЦИИ МАК-РОБЕРТА

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В этой статье изучается вопрос об оценке по модулю Е-функции Мак-Роберта [1] для комплексного переменного в области $Re z \geqslant 0$.

1. Пусть параметры Е-функции Мак-Роберта ([1], стр. 200)

$$E = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 1 : \rho_1, \ldots, \rho_q : z) = E[z] =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + m) \ldots \Gamma(\alpha_p + m)}{\Gamma(\rho_1 + m) \ldots \Gamma(\rho_q + m)} \left(-\frac{1}{z}\right)^m, \ p \geqslant q + 1 \tag{1}$$

удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{gathered} \alpha_1 > \ldots > \alpha_p > 1, \ \rho_1 > \ldots > \rho_q; \\ \alpha_{p-q+1} < \rho_1 \leqslant 2\alpha_{p-q+1}, \ldots, \ \alpha_p < \rho_q \leqslant 2\alpha_p; \end{gathered} \tag{2}$$

тогда для функции (1) имеет место теорема.

Теорема. Модуль Е-функции Мак-Роберта (1), параметры которой удовлетворяют неравенствам (2), для $Re z \geqslant 0$ меньше следующей суммы:

$$|E[z]| < \frac{\Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\rho_1) \ldots \Gamma(\rho_q)} \left[1 : \left| 1 + \frac{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\rho_1 \ldots \rho_q z} \right| + \right.$$

$$+ \sum_{m=1}^{p-q} \frac{|z| (\rho_1 - 1) \ldots (\rho_q - 1)}{\alpha_1 \ldots \alpha_m (\alpha_m - 1) \ldots (\alpha_p - 1)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{q} \frac{(\rho_m - \alpha_{p-q+m}) \rho_1 \ldots \rho_m (\rho_{m+1} - 1) \ldots (\rho_q - 1) \left| \frac{\rho_1 \ldots \rho_{m-1} z}{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-q+m-1}} + \frac{1}{2} \right|^{-1}}{\frac{3}{2|z|} \alpha_1 \ldots \alpha_{p-q+m} (\alpha_{p-q+m+1} - 1) \ldots (\alpha_p - 1) \left| \frac{\rho_1 \ldots \rho_m z}{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-q+m}} + 1 \right|^2}. \tag{3}$$

Доказательство. На основании ([1], стр. 201 (3) и стр. 72 (10), (12)) представим Е-функцию Мак-Роберта (1) кратным интегралом

$$E[z] = I_p = \frac{1}{\Gamma(\rho_1 - \alpha_{p-q+1}) \ldots \Gamma(\rho_q - \alpha_p)} \int_0^1 t^{\alpha_p - 1} \times$$

$$\times (1-t)^{\rho q-\alpha p-1}\, dt \ldots \int\limits_0^1 s^{\alpha p-q+1-1}(1-s)^{\rho_1-\alpha_{p-q+1}-1}\, ds \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty r^{\alpha_{p-q}-1} e^{-r}\, dr \ldots \int\limits_0^\infty v^{\alpha_1-1}\left(1+\frac{v\ldots t}{z}\right)^{-1} e^{-v}\, dv. \qquad (4)$$

Последний интеграл равенства (4) ввиду ([2], стр. 144) и ([3]), стр. 28) представим в виде суммы подходящей дроби и функционального ряда:

$$E[z] = I_{p-1}\Gamma(\alpha_1)\left[\left(1+\frac{\alpha_1}{z_1}\right)^{-1}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m!\, z_1}{(\alpha_1)_{m+1}\, Q_{2m}(z_1)\, Q_{2m+2}(z_1)}\right]; \qquad (5)$$

$$z_1 = \frac{z}{\alpha_1 w\ldots t}, \quad (a_m) = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}.$$

Модуль второго слагаемого правой части равенства (5) вычисляется до конца и равен $\dfrac{|z|(\rho_1-1)\ldots(\rho_q-1)}{\alpha_1(\alpha_1-1)\ldots(\alpha_p-1)}$ ввиду того, что для $Rez \geqslant 0$ в статье ([3], стр. 28) получено

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m!}{(\alpha_1)_{m+1}|\, Q_{2m}(z)\, Q_{2m+2}(z)\,|} < \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2)_m}{(\alpha_1)_{m+2}} = \frac{1}{(\alpha_1-1)_2}. \qquad (6)$$

Модуль первого слагаемого правой части равенства (5), если отбросить множитель $\Gamma(\alpha_1)$, равен модулю следующей E-функции:

$$|I_{p-1}| = \left|E\left(\alpha_2,\ldots,\ \alpha_p,\ 1:\rho_1,\ldots,\ \rho_q:\frac{z}{\alpha_1}\right)\right|. \qquad (7)$$

Последний интеграл вида (5) функции (7) опять разложим в цепную дробь и представим двумя слагаемыми согласно равенству (5) и т. д. После p—q-кратной замены интегралов вида (5) двумя слагаемыми согласно равенства (5) и полного интегрирования вторых слагаемых получим

$$J_{q-1}\int\limits_0^1 s^{\alpha_{p-q+1}-1}(1-s)^{\rho_1-\alpha_{p-q+1}-1}\left(1-\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{p-q}\, s\ldots t}{z}\right)^{-1} ds =$$

$$= J_{q-1}\frac{\Gamma(\alpha_{p-q+1})\,\Gamma(\rho_1-\alpha_{p-q+1})}{\Gamma(\rho_1)}\left[\left(1-\frac{\alpha_1\ldots\alpha_{p-q+1}\, u\ldots t}{\rho_1 z}\right)^{-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{z}{\alpha_1\ldots\alpha_{p-q}\, u\ldots t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\rho_1-\alpha_{p-q+1})_m\, m!\,(\alpha_{p-q+1})_m}{(\rho_1)_{2m}(\rho_1+m-+)_m(Q_{2m}\, Q_{2m+2}}\right], \qquad (8)$$

так как последний интеграл левой части равенства (8) ввиду ([4], стр. 312 (3)) и ([5], стр. 21) представляется подходящей дробью и остактом в виде функционального ряда.

Модуль второго слагаемого равенства (8) вычисляется до конца и ввиду неравенств (2), равенства (4), ([5], стр. 24) и неравенств (12) равен следующему выражению:

$$\gamma_1 = \frac{2|z|(\rho_1-\alpha_{p-q+1})\rho_1(\rho_2-1)\ldots(\rho_q-1)\left|\dfrac{z}{\alpha_1\ldots\alpha_{p-q}}+\dfrac{1}{2}\right|^{-1}}{3\alpha_1\ldots\alpha_{p-q+1}(\alpha_{p-q+2}-1)\ldots(\alpha_p-1)\left|\dfrac{\rho_1 z}{\alpha_1\ldots\alpha_{p-q+1}}+1\right|^2} \qquad (9)$$

Модуль первого слагаемого равенства (8), если отбросить множитель $\frac{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_{p-q+1})}{\Gamma(\rho_1)}$, равен модулю следующей Е-функции

$$|I_{q-1}| = \left| E\left(\alpha_{p-q+2},\dots,\ \alpha_p,\ \ 1:\rho_2,\dots,\ \rho_q : \frac{\rho_1 z}{\alpha_1\dots\alpha_{p-q+1}}\right)\right|. \qquad (10)$$

Внутренний интеграл функции (10) также разложим в цепную дробь и представим двумя слагаемыми согласно правой части равенства (8) и т. д. После q—1-кратной замены интегралов вида (8) двумя слагаемыми и полного интегрирования всех слагаемых с учетом равенств (8) и (9) окончательно получим равенство (3), что и требовалось доказать.

2. Докажем теорему о неравенстве многочленов.

Теорема. Если корни многочлена $Q_{2\kappa+2}(z)$ разделяются корнями многочлена $Q_{2\kappa}(z)$, т. е.

$$\begin{gathered} Q_{2\kappa}(z) = (z+\beta_1)\dots(z+\beta_\kappa), \\ Q_{2\kappa+2}(z) = (z+\alpha_1)\dots(z+\alpha_{\kappa+1}),\ \ \kappa = 1,\ 2,\dots \\ \beta_0 = \alpha_1 > \beta_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_\kappa > \beta_\kappa > \alpha_{\kappa+1} = \beta_{\kappa+1} > 0, \end{gathered} \qquad (11)$$

то относительно этих многочленов имеет место неравенство

$$\begin{gathered} |Q_{2\kappa+2}(z)| \geqslant |Q_{2\kappa}(z)|\,|z+\alpha|,\ \ \alpha_1\dots\alpha_{\kappa+1} = \beta_1\dots\beta_\kappa\alpha, \\ Re z \geqslant 0,\ \ \alpha_1 > \alpha > \alpha_{\kappa+1}. \end{gathered} \qquad (12)$$

Доказательство. Непосредственным вычислением нетрудно доказать, что неравенство (12) справедливо для двух множителей, т. е.

$$|z+c|\,|z+d| \geqslant |z+a|\,|z+b|,\ \ ab = cd,\ \ 0 < a \leqslant b < d,\ \ Re z \geqslant 0. \qquad (13)$$

Пусть $\beta_{l-1} > \alpha > \beta_l$, $l = 1,\dots,\kappa+1$, тогда на основании неравенств (11) и (12) получим следующие неравенства:

$$\left\{\begin{array}{l} |z+\alpha_1|\,|z+\alpha_2| \geqslant |z+\beta_1|\left|z+\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1}\right|,\ \left(\alpha_1 > \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1} > \alpha_2\right); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left|z+\dfrac{\alpha_1\dots\alpha_l}{\beta_1\dots\beta_{l-1}}\right|\,|z+\alpha_{l+1}| \geqslant |z+\alpha|\left|\dfrac{\beta_l\dots\beta_\kappa}{\alpha_{l+2}\dots\alpha_{\kappa+1}}\right|, \\ \left(\dfrac{\alpha_1\dots\alpha_l}{\beta_1\dots\beta_{l-1}} > \dfrac{\alpha_1\dots\alpha_{l+1}}{\beta_1\dots\beta_{l-1}\alpha} = \dfrac{\beta_l\dots\beta_\kappa}{\alpha_{l+2}\dots\alpha_{\kappa+1}} > \beta_l\right); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left|z+\dfrac{\beta_{\kappa-1}\beta_\kappa}{\alpha_{\kappa+1}}\right|\,|z+\alpha_{\kappa+1}| \geqslant |z+\beta_{\kappa-1}|\,|z+\beta_\kappa|, \\ \left(\dfrac{\beta_{\kappa-1}\beta_\kappa}{\alpha_{\kappa+1}} > \beta_{\kappa-1} > \beta_\kappa > \alpha_{\kappa+1}\right). \end{array}\right. \qquad (14)$$

Перемножая левые и правые части неравенств (14) и сокращая обе части полученного неравенства на равные множители, мы получим необходимое неравенство (12), что и требовалось доказать.

3. Для Е-функции имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} &E(\alpha_1,\dots,\ \alpha_p : \rho_1,\dots,\rho_q : z) = s_{\kappa-1}(z) + R_{\kappa-1}(z) = \\ &= s_{\kappa-1}(z) + \left(-\frac{1}{z}\right)^\kappa E(\alpha_1+\kappa,\dots,\ \alpha_p+\kappa,\ \ 1:\rho_1+\kappa,\dots,\ \rho_q+\kappa,\ \ 1+\kappa : z). \end{aligned} \qquad (15)$$

Соотношение (15) легко проверяется путем подстановки ряда (1) вместо Е-функций и сравнение коэффициентов в левой и правой частях равенства при одинаковых степенях z^{-n}, где $n = \kappa, \kappa+1, \ldots$ Если параметры функции, расположенной в правой части равенства (15), удовлетворяют неравенствам (2), то формулу (3) можно применить для оценки этой функции, а это равнозначно оценке остаточного члена $R_{k-1}(z)$ частичной суммы S_{k-1} функции (15).

Функция Ломмеля ([5], стр. 50 (72)) представлена следующей функцией Мак-Роберта:

$$S_{\mu,\nu}(z) = \frac{z^{\mu-1} E\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}, \frac{1+\nu-\mu}{2}, 1 :: \frac{z^2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)},$$

$$-2 \leqslant \mu < -1,\ 0 \leqslant \nu < 1,\ \nu + \mu < -1. \tag{16}$$

Ввиду равенств (3), (15), и (16) функцию Ломмеля можно представить суммой отрезка ряда (1) и остаточного члена:

$$S_{\mu,\nu}(z) = z^{\mu-1}\sigma_{\kappa-1}\left(\frac{z^2}{4}\right) + \left(\frac{4}{|z|^2}\right)^{\kappa} |z|^{\mu-1}\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)_{\kappa}\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)_{\kappa} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{1+\frac{(2\kappa-1-\mu)^2-\nu^2}{z^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{|z|^2(2\kappa-\mu)}{4\left(\frac{-1+\nu-\mu}{2}+\kappa\right)_2\left(\frac{-1-\nu-\mu}{2}+\kappa\right)_2}\right]. \tag{17}$$

Например, в равенстве (17) для $\mu = -2$, $\nu = 0$, $z = 20$, $\kappa = 9$ остаточный член $\Delta_9 < 0.0000000015$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтман и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функция Лежандра). М., Физматгиз, 1965.
2. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.
3. В. Е. Корнилов. Применение цепных дробей к вычислению некоторых интегралов. Изв. ТПИ, т. 131, стр. 26—30, Томск, 1965.
4. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.
5. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. Изв. ТПИ, т. 131, стр. 21—25, Томск, 1965.
6. Г. Бейтман и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены). М., Физматгиз, 1966.