ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 226 1976

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье разбирается вопрос о представлении Е-функции Мак-Роберта (1) в виде суммы подходящих дробей. Получена также оценка остаточного члена по модулю, пригодная в комплексной области $Re z \geqslant 0$

Частным случаем функции (1) являются асимптотические представления функций Вебера, Струве и Ломмеля ([1], стр. 46—52), ([2], стр. 242), которые непосредственно связаны с функциями Бесселя (см. п. 3).

1. Относительно Е-функции Мак-Роберта ([3], стр. 201)

$$E(\alpha_1, \alpha_2, 1::z) = E(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(\alpha_1+m)\,\Gamma(\alpha_2+m)\left(-\frac{1}{z}\right)^m,$$

$$|z| \gg 1,\ \alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ Re z \geqslant 0, \tag{1}$$

докажем теорему.

Т е о р е м а. Функция (1) представляется следующей суммой подходящих дробей:

$$E(z) = \Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\left[\frac{n!}{(\alpha_1+1)_n} + \sum_{m=1}^{n}\frac{\alpha_1 b_m p_{2n+1}(z:a_m)}{a_m q_{2n+1}(z:a_m)} + \right.$$

$$\left. + R_{2n+1}(z)\right],\ n=1,2,\ldots;\ (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1), \tag{2}$$

$$p_{2n+1}(z) = \sum_{\kappa=0}^{n} z^n \sum_{m=0}^{n-\kappa} C_n^\kappa \frac{(-1)^{n-\kappa-m}}{(n+\alpha_2-\kappa-m)_{\kappa+1}}.$$

Коэффициенты a_m и b_m в равенстве (2) имеют положительные значения [4], стр. 5, 24 и ввиду [5], стр. 28, (7) определяются согласно равенства

$$\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{a_m}\right) = \sum_{\kappa=0}^{n} C_\kappa^n \frac{z^\kappa}{(\alpha_1+1)_\kappa} = q_{2n+1}(z),$$

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0. \tag{3}$$

$$b_m = -P_{2n+1}(-a_m) : \left\{a_m \frac{d}{dz}\left[q_{2n+1}(-a_m)\right]\right\},$$

$$P_{2n+1}(z) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} z^{\kappa+1} \sum_{m=0}^{n-\kappa-1} C_n^m \frac{(-1)^{n-\kappa-m-1}}{(n+\alpha_1-\kappa-m)_{\kappa+1}}. \tag{4}$$

Модуль остаточного члена равенства (2) меньше следующей суммы:

$$| R_{2n+1}(z) | < \frac{n!\,(\alpha_2)_2}{(\alpha_1+1)_n(\alpha_2+2)_2}\left\{\prod_{m=1}^{n}\left[1+\frac{x^2+y^2}{a_m^2(\alpha_2+2)_2}\right]\right\}^{-1}+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{q_m\,\alpha_1 n!}{a_m(\alpha_2+1)_n\,|\,q_{2n+1}(z:a_m)\,q_{2n+3}(z:a_m)\,|}, \qquad (5)$$

$$Rez \geqslant 0,\ n=1,\ 2,\ldots$$

Доказательство. Функцию (1) представим двойным интегралом [3], стр. 201, (3) и ввиду ([6], стр. 144), [5] стр. 28 и [7], стр. 374, (67) внутренний интеграл заменим суммой подходящей дроби и остаточного члена, подходящую дробь представим суммой элементарных дробей

$$\left\{E(z)=\int_0^\infty e^{-v}v^{\alpha_2-1}\,dv\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha_1-1}(1+uv:z)^{-1}\,du=\right.$$

$$=\Gamma(\alpha_1)\int_0^\infty e^{-v}v^{\alpha_2-1}\left[\frac{p_{2n+1}\left(\frac{z}{v}\right)}{q_{2n+1}\left(\frac{z}{v}\right)}+r_{2n+1}\left(\frac{z}{v}\right)\right]dv=\Gamma(\alpha_1)\left[\sum_{m=1}^{n}b_m\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\alpha_1}{a_m}\int_1^\infty\frac{e^{-v}v^{\alpha_2-1}\,dv}{1+a_m v:z}+\frac{\Gamma(\alpha_2)\,n!}{(\alpha_1+1)_n}+\rho_{2n+1}\left(\frac{z}{v}\right)\right]=\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\times \qquad (6)$$

$$\times\left\{\sum_{m=1}^{n}\frac{a_1 b_m}{a_m}\left[\frac{p_{2n+1}\left(\frac{z}{a_m}\right)}{q_{2n+1}\left(\frac{z}{a_m}\right)}+r_{2n+1}\left(\frac{z}{a_m}\right)\right]+\frac{n!}{(\alpha_1+1)_n}+\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\rho_{2n+1}\left(\frac{z}{v}\right)\right\}$$

Ввиду [5] (стр. 27—28) имеем

$$\left|r_{2n+1}\left(\frac{z}{a_m}\right)\right|=\left|\sum_{\kappa=n}^{\infty}\frac{\kappa!\,\alpha_2}{(\alpha_2+1)_{\kappa+1}\,q_{2\kappa+1}\,q_{2\kappa+3}}\right|<\frac{\alpha_2 n!}{|\,q_{2n+1}\,q_{2n+3}\,|}\times$$

$$\times\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(n+1)_\kappa}{(\alpha_2+1)_{\kappa+n+1}}\,\frac{n!:[\alpha_2+1)_n]}{|\,q_{2n+1}\,q_{2n\pm3}\,|};\ Rez\geqslant 0,\ q_\kappa\equiv q_\kappa\left(\frac{z}{a_m}\right). \qquad (7)$$

Далее, ввиду равенств (3), (6), неравенств (7), имеем

$$\left|\rho_{2n+1}\left(\frac{z}{v}\right)\right|<\frac{n!}{(\alpha_1+1)_n}\int_0^\infty e^{-v}v^{\alpha_2-1}\left[\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{x^2+y^2}{v^2a_m^2}\right)\right]^{-1}dv=$$

$$=\frac{n!}{(\alpha_1+1)_n}\sum_{m=1}^{n}c_m\int_0^\infty e^{-v}v^{\alpha_2-1}\left(1+\frac{x^2+y^2}{v^2a_m^2}\right)^{-1}dv=\sigma_{2n+1}(x,\ y). \qquad (8)$$

Представим каждый из интегралов правой части равенства (8) бесконечным рядом, применяя формулу [3], стр. 19, (15) и ввиду равенства (1), первого равенства (6) и неравенства (11), имеем

$$\sigma_{2n+1}(x,\ y)=\frac{n!\,2^{\alpha_2+1}}{\sqrt{\pi}\,(\alpha_1+1)_n}\sum_{m=1}^{n}\frac{c_m a_m^2}{x^2+y^2}\int_0^\infty e^{-v}v^{\frac{\alpha_2}{2}}vd\times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{\alpha_2}{2}+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{4a_m^2 uv}{x^2+y^2}\right)^{-1} du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Gamma(\alpha_2)(\alpha_2)_2}{(\alpha_1+1)_n(\alpha_2+2)_2} \left\{ \prod_{m=1}^{n} \left[1 + \frac{x^2+y^2}{a_m^2(\alpha_2+2)_2}\right]\right\}^{-1}, \; Re z \geqslant 0. \tag{9}$$

На основании равенства (6), неравенств (7) и (9) теорема доказана.

2. Докажем неравенство для одного интеграла.

Теорема. Если многочлен $Q_{4n}(x)$ имеет отрицательные корни

$$Q_{4n}(x) = \prod_{m=1}^{2n} \left(1 + \frac{x}{\beta_m}\right), \; n = 1, 2, \ldots;$$

$$\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_{2n} > 0, \tag{10}$$

то относительно следующего интеграла I справедливо неравенство.

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-v} v^{\alpha-1} dv}{Q_{4n}(x:v)} \frac{\Gamma(\alpha)}{a_{4n}(x:\alpha)}, \; \alpha > 0, \; x \geqslant 0. \tag{11}$$

Доказательство. Частное $1 : Q_{4n}(x:v)$ представим элементарными дробями

$$\frac{1}{Q_{4n}(x:v)} = 1 + \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{b_\kappa x}{x + v\beta_{2\kappa-1}} - \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{c_\kappa x}{x + v\beta_{2\kappa}}; \; \beta_{2\kappa} < \beta_{2\kappa-1}. \tag{12}$$

На основании равенств (11) и (12) имеем

$$J = \frac{\Gamma(\alpha)}{Q_{4n}\left(\frac{x}{\alpha}\right)} + \Gamma(\alpha) \left\{ \sum_{\kappa=1}^{n} b_\kappa \left[\lim_{m\to\infty} \frac{p_{2m}\left(\frac{x}{\beta_{2\kappa-1}}\right)}{q_{2m}\left(\frac{x}{\beta_{2\kappa-1}}\right)} - \frac{x}{x + \beta_{2\kappa-1}\alpha} \right] - \right.$$

$$\left. - \sum_{\kappa=1}^{n} c_\kappa \left[\lim_{m\to\infty} \frac{p_{2m}(x:\beta_{2\kappa})}{q_{2m}(x:\beta_{2\kappa})} - \frac{x}{x + \beta_{2\kappa}\alpha} \right] \right\} \leqslant \frac{\Gamma(\alpha)}{Q_{4n}(x:\alpha)}. \tag{13}$$

Ввиду [6], стр. 12 и равенства (12) получим неравенства

$$\frac{x}{x + \beta_{2\kappa-1}\alpha} \leqslant \frac{x}{x + \beta_{2\kappa-1}(\alpha - \varepsilon)} \leqslant \frac{p_{2n+2}(x:\beta_{2\kappa-1})}{q_{2n+2}(x:\beta_{2\kappa-1})}, \tag{14}$$

$n = 1, 2, \ldots; \; \alpha > 0, \; \varepsilon > 0, \; \varepsilon \to 0.$

$$\frac{x}{x + \beta_{2\kappa-1}\alpha} \leqslant \frac{x}{x + \beta_{2\kappa}\alpha} \leqslant \frac{x}{x + \beta_{2\kappa}(\alpha - \varepsilon)} \leqslant \frac{p_{2n+2}(x:\beta_{2\kappa})}{q_{2n+2}(x:\beta_{2\kappa})}, \tag{15}$$

$n = 1, 2, \ldots$

Далее, ввиду неравенств (14) и (15), сумма, расположенная в фигурных скобках левой части неравенства (13), удовлетворяет неравенству

$$\sum_{\kappa=1}^{n} b_\kappa \left[\lim_{m\to\infty} \frac{p_{2m}(x:\beta_{2\kappa-1})}{q_{2m}(x:\beta_{2\kappa-1})} - \frac{x}{x + \beta_{2\kappa-1}\alpha} \right] - \sum_{\kappa=1}^{n} c_\kappa \left[-\frac{x}{x + \beta_{2\kappa}\alpha} + \right.$$

$$+\lim_{m\to\infty}\frac{p_{2m}(x:\beta_{2\kappa})}{q_{2m}(x:\beta_{2\kappa})}\Bigg]\leqslant\sum_{\kappa=1}^{n}b_\kappa\left[\frac{x}{x+\beta_{2\kappa-1}(\alpha-\varepsilon)}-\frac{x}{x+\beta_{2\kappa-1}\alpha}\right]-$$

$$-\sum_{\kappa=1}^{n}c_\kappa\left[\frac{x}{x+\beta_{2\kappa}(\alpha-\varepsilon)}-\frac{x}{x+\beta_{2\kappa}\alpha}\right]=F(x). \qquad (16)$$

Правая часть неравенства (16) ввиду равенства (12) имеет неположительное значение

$$F(x)=\frac{1}{Q_{4n}\left(\frac{x}{\alpha-\varepsilon}\right)}-\frac{1}{Q_{4n}\left(\frac{x}{\alpha}\right)}\leqslant 0, \qquad (17)$$

поэтому, на основании неравенств (16) и (17), справедливы также и неравенства (13) и (11), что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается неравенство вида (11) для многочлена нечетной степени.

3. Асимптотические представления функций Вебера $\Omega_\nu(z)$ Струве $S_\nu(z)$ [2], стр. 242 и Ломмеля $S_{\mu,\nu}(z)$ [1], стр. 50, (72) выражаются посредством функции (1)

($Y_\nu(z)$ — функция Бесселя второго рода)

$$\Omega_\nu(z)+Y_\nu(z)=-\frac{1-\cos\nu\pi}{\pi z}\cdot\frac{E\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{\nu}{2},\ 1::\frac{z^2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}-$$

$$-\frac{1-\cos\nu\pi}{\pi z}\cdot\frac{\nu E\left(1-\frac{\nu}{2},\ 1+\frac{\nu}{2},\ 1::\frac{z^2}{4}\right)}{z\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)};\ -1<\nu<1. \qquad (18)$$

$$S_\nu(z)=Y_\nu(z)+\frac{E\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\nu,\ 1::\frac{z^2}{4}\right)}{\pi\left(\frac{z}{2}\right)^{1-\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)},\ \nu<\frac{1}{2}. \qquad (19)$$

$$S_{\mu,\nu}(z)=\frac{E\left(\frac{1-\nu-\mu}{2},\ \frac{1+\nu-\mu}{2},\ ::\frac{z^2}{4}\right)}{z^{1-\mu}\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)}, \qquad (20)$$

$\mu+\nu<1,\ \mu-\nu<1.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтман и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены). М., Физматгиз, 1966.

2. Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.

3. Г. Бейтман и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.

4. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1963.

5. В. Е. Корнилов. Применение цепных дробей к вычислению некоторых видов интегралов. Изв. ТПИ, т. 131, стр. 26—30, г. Томск, 1965.

6. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., Гостехиздат, 1956.

7. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. II, М., Гостехиздат, 1953.