

**ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ  
ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ**

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье разбирается вопрос о представлении E-функции Мак-Роберта (1) в виде суммы подходящих дробей. Получена также оценка остаточного члена по модулю, пригодная в комплексной области  $Re z \geq 0$

Частным случаем функции (1) являются асимптотические представления функций Вебера, Струве и Ломмеля ([1]), стр. 46—52), ([2], стр. 242), которые непосредственно связаны с функциями Бесселя (см. п. 3).

1. Относительно E-функции Мак-Роберта ([3], стр. 201)

$$E(\alpha_1, \alpha_2, 1 :: z) = E(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(\alpha_1 + m) \Gamma(\alpha_2 + m) \left(-\frac{1}{z}\right)^m, \\ |z| \gg 1, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, Re z \geq 0, \quad (1)$$

докажем теорему.

Теорема. Функция (1) представляется следующей суммой подходящих дробей:

$$E(z) = \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \left[ \frac{n!}{(\alpha_1 + 1)_n} + \sum_{m=1}^n \frac{\alpha_1 b_m p_{2n+1}(z : a_m)}{a_m q_{2n+1}(z : a_m)} + R_{2n+1}(z) \right], \\ n = 1, 2, \dots; (a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1), \quad (2)$$

$$p_{2n+1}(z) = \sum_{\kappa=0}^n z^\kappa \sum_{m=0}^{n-\kappa} C_n^\kappa \frac{(-1)^{n-\kappa-m}}{(n + \alpha_2 - \kappa - m)_{\kappa+1}}.$$

Коэффициенты  $a_m$  и  $b_m$  в равенстве (2) имеют положительные значения [4], стр. 5, 24 и ввиду [5], стр. 28, (7) определяются согласно равенства

$$\prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{a_m}\right) = \sum_{\kappa=0}^n C_n^\kappa \frac{z^\kappa}{(\alpha_1 + 1)_\kappa} = q_{2n+1}(z), \\ a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0. \quad (3)$$

$$b_m = -P_{2n+1}(-a_m) : \left\{ a_m \frac{d}{dz} [q_{2n+1}(-a_m)] \right\},$$

$$P_{2n+1}(z) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} z^{\kappa+1} \sum_{m=0}^{n-\kappa-1} C_n^m \frac{(-1)^{n-\kappa-m-1}}{(n + \alpha_1 - \kappa - m)_{\kappa+1}}. \quad (4)$$

Модуль остаточного члена равенства (2) меньше следующей суммы:

$$|R_{2n+1}(z)| < \frac{n! (\alpha_2)_2}{(\alpha_1 + 1)_n (\alpha_2 + 2)_2} \left\{ \prod_{m=1}^n \left[ 1 + \frac{x^2 + y^2}{a_m^2 (\alpha_2 + 2)_2} \right] \right\}^{-1} +$$

$$+ \sum_{m=1}^n \frac{q_m \alpha_1 n!}{a_m (\alpha_2 + 1)_n |q_{2n+1}(z: a_m) q_{2n+3}(z: a_m)|}, \quad (5)$$

$$\operatorname{Re} z \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Функцию (1) представим двойным интегралом [3], стр. 201, (3) и ввиду ([6], стр. 144), [5] стр. 28 и [7], стр. 374, (67) внутренний интеграл заменим суммой подходящей дроби и остаточного члена, подходящую дробь представим суммой элементарных дробей

$$\left\{ E(z) = \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha_2-1} dv \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha_1-1} (1 + uv:z)^{-1} du = \right.$$

$$\left. = \Gamma(\alpha_1) \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha_2-1} \left[ \frac{p_{2n+1}\left(\frac{z}{v}\right)}{q_{2n+1}\left(\frac{z}{v}\right)} + r_{2n+1}\left(\frac{z}{v}\right) \right] dv = \Gamma(\alpha_1) \left[ \sum_{m=1}^n b_m \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\alpha_1}{a_m} \int_0^\infty \frac{e^{-v} v^{\alpha_2-1} dv}{1 + a_m v:z} + \frac{\Gamma(\alpha_2) n!}{(\alpha_1 + 1)_n} + \rho_{2n+1}\left(\frac{z}{v}\right) \right] = \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \times \quad (6)$$

$$\left. \times \left\{ \sum_{m=1}^n \frac{a_m b_m}{a_m} \left[ \frac{p_{2n+1}\left(\frac{z}{a_m}\right)}{q_{2n+1}\left(\frac{z}{a_m}\right)} + r_{2n+1}\left(\frac{z}{a_m}\right) \right] + \frac{n!}{(\alpha_1 + 1)_n} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \rho_{2n+1}\left(\frac{z}{v}\right) \right\}$$

Ввиду [5] (стр. 27—28) имеем

$$\left| r_{2n+1}\left(\frac{z}{a_m}\right) \right| = \left| \sum_{\kappa=n}^\infty \frac{\kappa! \alpha_2}{(\alpha_2 + 1)_{\kappa+1} q_{2\kappa+1} q_{2\kappa+3}} \right| < \frac{\alpha_2 n!}{|q_{2n+1} q_{2n+3}|} \times$$

$$\times \sum_{\kappa=0}^\infty \frac{(n+1)_\kappa}{(\alpha_2 + 1)_{\kappa+n+1}} \frac{n! : [\alpha_2 + 1]_n}{|q_{2n+1} q_{2n+3}|}; \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad q_\kappa \equiv q_\kappa\left(\frac{z}{a_m}\right). \quad (7)$$

Далее, ввиду равенств (3), (6), неравенств (7), имеем

$$\left| \rho_{2n+1}\left(\frac{z}{v}\right) \right| < \frac{n!}{(\alpha_1 + 1)_n} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha_2-1} \left[ \prod_{m=1}^n \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{v^2 a_m^2} \right) \right]^{-1} dv =$$

$$= \frac{n!}{(\alpha_1 + 1)_n} \sum_{m=1}^n c_m \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha_2-1} \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{v^2 a_m^2} \right)^{-1} dv = \sigma_{2n+1}(x, y). \quad (8)$$

Представим каждый из интегралов правой части равенства (8) бесконечным рядом, применяя формулу [3], стр. 19, (15) и ввиду равенства (1), первого равенства (6) и неравенства (11), имеем

$$\sigma_{2n+1}(x, y) = \frac{n! 2^{\alpha_2+1}}{\sqrt{\pi} (\alpha_1 + 1)_n} \sum_{m=1}^n \frac{c_m a_m^2}{x^2 + y^2} \int_0^\infty e^{-v} v^{\frac{\alpha_2}{2}} v d \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{4a_m^2 uv}{x^2 + y^2} \right)^{-1} du \leq \\ & \leq \frac{\Gamma(\alpha_2) (\alpha_2)_2}{(\alpha_1 + 1)_n (\alpha_2 + 2)_2} \left\{ \prod_{m=1}^n \left[ 1 + \frac{x^2 + y^2}{a_m^2 (\alpha_2 + 2)_2} \right] \right\}^{-1}, \operatorname{Re} z \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

На основании равенства (6), неравенств (7) и (9) теорема доказана.

2. Докажем неравенство для одного интеграла.

Теорема. Если многочлен  $Q_{4n}(x)$  имеет отрицательные корни

$$Q_{4n}(x) = \prod_{m=1}^{2n} \left( 1 + \frac{x}{\beta_m} \right), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (10)$$

$$\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_{2n} > 0,$$

то относительно следующего интеграла  $I$  справедливо неравенство.

$$J = \int_0^{\infty} \frac{e^{-v} v^{\alpha-1} dv}{Q_{4n}(x:v)} \frac{\Gamma(\alpha)}{a_{4n}(x:\alpha)}, \quad \alpha > 0, \quad x \geq 0. \quad (11)$$

Доказательство. Частное  $1:Q_{4n}(x:v)$  представим элементарными дробями

$$\frac{1}{Q_{4n}(x:v)} = 1 + \sum_{\kappa=1}^n \frac{b_{\kappa} x}{x + v\beta_{2\kappa-1}} - \sum_{\kappa=1}^n \frac{c_{\kappa} x}{x + v\beta_{2\kappa}}; \quad \beta_{2\kappa} < \beta_{2\kappa-1}. \quad (12)$$

На основании равенств (11) и (12) имеем

$$\begin{aligned} J &= \frac{\Gamma(\alpha)}{Q_{4n}\left(\frac{x}{\alpha}\right)} + \Gamma(\alpha) \left\{ \sum_{\kappa=1}^n b_{\kappa} \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_{2m}\left(\frac{x}{\beta_{2\kappa-1}}\right)}{q_{2m}\left(\frac{x}{\beta_{2\kappa-1}}\right)} - \frac{x}{x + \beta_{2\kappa-1}\alpha} \right] - \right. \\ & \left. - \sum_{\kappa=1}^n c_{\kappa} \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_{2m}(x:\beta_{2\kappa})}{q_{2m}(x:\beta_{2\kappa})} - \frac{x}{x + \beta_{2\kappa}\alpha} \right] \right\} \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{Q_{4n}(x:\alpha)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Ввиду [6], стр. 12 и равенства (12) получим неравенства

$$\frac{x}{x + \beta_{2\kappa-1}\alpha} \leq \frac{x}{x + \beta_{2\kappa-1}(\alpha - \varepsilon)} \leq \frac{p_{2n+2}(x:\beta_{2\kappa-1})}{q_{2n+2}(x:\beta_{2\kappa-1})}, \quad (14)$$

$$n = 1, 2, \dots; \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\frac{x}{x + \beta_{2\kappa-1}\alpha} \leq \frac{x}{x + \beta_{2\kappa}\alpha} \leq \frac{x}{x + \beta_{2\kappa}(\alpha - \varepsilon)} \leq \frac{p_{2n+2}(x:\beta_{2\kappa})}{q_{2n+2}(x:\beta_{2\kappa})}, \quad (15)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Далее, ввиду неравенств (14) и (15), сумма, расположенная в фигурных скобках левой части неравенства (13), удовлетворяет неравенству

$$\sum_{\kappa=1}^n b_{\kappa} \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_{2m}(x:\beta_{2\kappa-1})}{q_{2m}(x:\beta_{2\kappa-1})} - \frac{x}{x + \beta_{2\kappa-1}\alpha} \right] - \sum_{\kappa=1}^n c_{\kappa} \left[ - \frac{x}{x + \beta_{2\kappa}\alpha} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_{2m}(x: \beta_{2\kappa})}{q_{2m}(x: \beta_{2\kappa})} \leq \sum_{\kappa=1}^n b_{\kappa} \left[ \frac{x}{x + \beta_{2\kappa-1}(\alpha - \varepsilon)} - \frac{x}{x + \beta_{2\kappa-1}\alpha} \right] - \\
& - \sum_{\kappa=1}^n c_{\kappa} \left[ \frac{x}{x + \beta_{2\kappa}(\alpha - \varepsilon)} - \frac{x}{x + \beta_{2\kappa}\alpha} \right] = F(x). \quad (16)
\end{aligned}$$

Правая часть неравенства (16) ввиду равенства (12) имеет неположительное значение

$$F(x) = \frac{1}{Q_{4n}\left(\frac{x}{\alpha - \varepsilon}\right)} - \frac{1}{Q_{4n}\left(\frac{x}{\alpha}\right)} \leq 0, \quad (17)$$

поэтому, на основании неравенств (16) и (17), справедливы также и неравенства (13) и (11), что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается неравенство вида (11) для многочлена нечетной степени.

3. Асимптотические представления функций Вебера  $\Omega_{\nu}(z)$  Струве  $S_{\nu}(z)$  [2], стр. 242 и Ломмеля  $S_{\mu, \nu}(z)$  [1], стр. 50, (72) выражаются посредством функции (1)

( $Y_{\nu}(z)$  — функция Бесселя второго рода)

$$\begin{aligned}
\Omega_{\nu}(z) + Y_{\nu}(z) = & - \frac{1 - \cos \nu\pi}{\pi z} \cdot \frac{E\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}, 1:: \frac{z^2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} - \\
& - \frac{1 - \cos \nu\pi}{\pi z} \cdot \frac{\nu E\left(1 - \frac{\nu}{2}, 1 + \frac{\nu}{2}, 1:: \frac{z^2}{4}\right)}{z\Gamma\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}; \quad -1 < \nu < 1. \quad (18)
\end{aligned}$$

$$S_{\nu}(z) = Y_{\nu}(z) + \frac{E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \nu, 1:: \frac{z^2}{4}\right)}{\pi \left(\frac{z}{2}\right)^{1-\nu} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)}, \quad \nu < \frac{1}{2}. \quad (19)$$

$$S_{\mu, \nu}(z) = \frac{E\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}, \frac{1+\nu-\mu}{2}, :: \frac{z^2}{4}\right)}{z^{1-\mu} \Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)}, \quad (20)$$

$$\mu + \nu < 1, \quad \mu - \nu < 1.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтман и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены). М., Физматгиз, 1966.
2. Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.
3. Г. Бейтман и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.
4. Т. И. Стилтъес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1963.
5. В. Е. Корнилов. Применение цепных дробей к вычислению некоторых видов интегралов. Изв. ТПИ, т. 131, стр. 26—30, г. Томск, 1965.
6. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., Гостехиздат, 1956.
7. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. II, М., Гостехиздат, 1953.