ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 226 1976

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ БЕТА-ФУНКЦИИ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье рассматривается вопрос о приближенном представлении бета-функции суммой двух подходящих дробей известной цепной дроби [1].

1. Известно, что функция

$$F(\alpha, 1; \gamma; -z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_\kappa}{(\gamma)_\kappa}(-z)^\kappa, \ |z| < 1, \ \gamma \neq 0, -1, \ldots; \tag{1}$$

где

$$(a)_\kappa = a(a+1)\ldots(a+\kappa-1), \ (a)_0 = 1 \tag{2}$$

выражается посредством интеграла [2], стр. 308,

$$F(\alpha, 1; \gamma; -z) = \frac{(\gamma-1)z^{1-\gamma}}{(1+z)^{\alpha-\gamma+1}} \int_0^z \frac{t^{\gamma-2}\,dt}{(1+t)^{\gamma-\alpha}}, \quad \gamma > 1, \tag{3}$$

представляется в виде цепной дроби [1], стр. 320.

$$F(\alpha, 1; \gamma; -z) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\alpha z}{\gamma + \cdots + \cfrac{\kappa(\gamma-\alpha+\kappa-1)z}{\gamma+2\kappa-1+\cfrac{(\gamma+\kappa-1)(\alpha+\kappa)z}{\gamma+2\kappa+\cdots}}}} \tag{4}$$

Бета-функция может быть выражена посредством гамма-функции [3], стр. 28,

$$B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y) : \Gamma(x+y) \tag{5}$$

и представляется функциональным рядом [2], стр. 291,

$$B(x, y) = \frac{1}{x} F(1-y, x; x+1; 1) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(1-y)_\kappa}{\kappa!\,(x+\kappa)}. \tag{6}$$

Ряд (6) для вычисления бета-функции мало пригоден ввиду его медленной сходимости.

Для вычисления бета-функции представим ее в виде суммы двух рядов [4], стр. 112:

$$\mathrm{B}(x,\ y) = 2^{1-x-y}\left[\frac{1}{x} F(1-y,\ 1;\ x+1;\ -1) + \frac{1}{y} F(1-x;\ 1;\ y+1;\ -1)\right]. \tag{7}$$

Каждый из рядов правой части равенства (7) представляется цепной дробью (4). Вычислим несколько подходящих дробей цепной дроби (4):

$$\begin{cases} 3)\ \dfrac{(\gamma)_2 + (\gamma - \alpha) z}{(\gamma)_2 + \gamma(\alpha+1) z};\quad 4)\ \dfrac{(\gamma)_3 + (\gamma+1)\left[(\alpha+2)(\gamma-2)+4\right] z}{(\gamma)_3 + 2(\gamma)_2(\alpha+1) z + \gamma(\alpha)_2 z^2}; \\ 5)\ \dfrac{(\gamma)_4 + (\gamma+1)_2\left[(\alpha+4)(\gamma-3)+12\right] z + 2(\gamma-\alpha)_2 z^2}{(\gamma)_4 + 2(\gamma)_3(\alpha+2) z + (\gamma)_2(\alpha+1)_2 z^2}; \\ 6)\ \dfrac{(\gamma)_5 + 2(\gamma+1)_3\left[(\alpha+3)(\gamma-2)+6\right] z + \left[3(\alpha+2)(\gamma+1)_2(\gamma-3\alpha) + (\alpha)_2(\gamma+2)_3\right] z^2}{(\gamma)_5 + 3(\gamma)_4(\alpha+2) z + 3(\gamma)_3(\alpha+1)_2 z^2 + (\gamma)_2(\alpha)_3 z^3}; \end{cases} \tag{8}$$

Суммируя последовательно подходящие дроби (3) — (6), согласно равенств (7) и (8), мы получим следующие дробно-рациональные приближения бета-функции:

$$\begin{cases} \mathrm{B}(x,\ y) = 3)\ \dfrac{(x+y)(x+y+2)(x^2+y^2+5x+5y+4)}{2^{x+y-1}(x)_2(y)_2(x-y+4)(y-x+4)} + r_3(x,\ y); \\ 4)\ \dfrac{2^{2-x-y}(x+y)_2(x+y+4)(x^2+y^2+9x+9y+16)}{(x)_2(y)_2\left[(x-y)^2+9x-7y+16\right]\left[(x-y)^2+9y-7x+16\right]} + r_4(x,\ y); \\ 5)\ \dfrac{(z)_2(z+4)\left\{\left[(z^2+9z+18)^2-4z^2\right] - xy(4z^2+35z+57) + 3x^2y^2\right\}}{2^{z-2}(x)_3(y)_3\left[(x-y)^2+13x-11y+36\right]\left[(x-y)^2+13y-11x+36\right]} + r_5(x,\ y); \\ 6)\ \dfrac{3\cdot 2^{2-z}(z)_3(z+6)\left\{\left[(z^2+13z+38)^2-4z^2\right] - xy(4z^2+51z+137) + 3x^2y^2\right\}}{(x)_3(y)_3\left[36-(x-y)^2\right]\left[(x-y)^2+15x-9y+38\right]\left[(x-y)^2+15y-9x+38\right]} + r_6(x,\ y);\ \text{где}\ z = x+y. \end{cases} \tag{9}$$

В случае $x = y$ оба слагаемые равенства (7) подобны, и приближения бета-функции будут проще:

$$\begin{cases} \mathrm{B}(x,\ x) = 6)\ \dfrac{(x+3)(2x+1)(x^2+27x+38)}{3\cdot 2^{2x-1}(x)_3(3x+19)} + r_6(x,\ x); \\ 7)\ \dfrac{(2x+1)\left[(x+3)_2(x^2+47x+66) + 12x(x+1)\right]}{3\cdot 2^{2x+1}(x)_4(x+11)} + r_7(x,\ x). \end{cases} \tag{10}$$

Наряду с приближениями бета-функции, согласно формул (9), можно дать общий вид суммы подходящих дробей для бета-функции [5], стр. 23:

$$
\begin{cases}
2\kappa)\,\mathrm{B}(x,\,y) = \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\kappa}\left[\sum\limits_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa}^{m+n}(-1)^m \dfrac{(x+\kappa)_{n+m}}{(1-y+m)_n\,(x)_{m+1}}\right]}{2^{x+y-1}\sum\limits_{n=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{n}\left[(x+\kappa)_n : (1-y)_n\right]} + \\[2ex]
+ \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\kappa}\left[\sum\limits_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa}^{n+m}(-1)^m \dfrac{(y+\kappa)_{n+m}}{(1-x+m)_n\,(y)_{m+1}}\right]}{2^{x+y-1}\sum\limits_{n=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{n}\dfrac{(y+\kappa)_n}{(1-x)_n}} + r_{2\kappa}(x,\,y);
\end{cases}
\qquad (11)
$$

$$
\begin{cases}
2\kappa+1)\,\mathrm{B}(x,\,y) = \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\kappa}\left[\sum\limits_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa}^{n+m}(-1)^m \dfrac{(x+\kappa+1)_{n+m}\,(1-y)}{(1-y+m)_{n+1}\,(x)_{m+1}}\right]}{2^{x+y-1}\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{n}\left[(x+\kappa+1)_n : (2-y)_n\right]} + \\[2ex]
+ \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\kappa}\left[\sum\limits_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa}^{n+m}(-1)^m \dfrac{(y+\kappa+1)_{n+m}\,(1-x)}{(1-x+m)_{n+1}\,(y)_{m+1}}\right]}{2^{x+y-1}\sum\limits_{n=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{n}\left[(y+\kappa+1)_n : (2-x)_n\right]} + r_{2\kappa+1}(x,\,y).
\end{cases}
\qquad (12)
$$

2. Остаточный член $r_n(x,y)$ в правой части равенств (11) и (12) может быть представлен в виде суммы двух бесконечных функциональных рядов типа Лейбница [6], стр. 12, поэтому $|r_n(x,y)|$ меньше суммы абсолютных величин двух слагаемых (по одному первому слагаемому из каждого функционального ряда):

$$
\begin{cases}
|r_{2\kappa}(x,\,y)| < \kappa!\,(x+y)_{\kappa}\,2^{1-x-y}\times \\[1ex]
\times\left\{1 : \left[(x)_{\kappa+1}\left|(2-y)_{\kappa}\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{m}\dfrac{(x+\kappa)_m}{(1-y)_m}\right|\,\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{m}\dfrac{(x+\kappa+1)_m}{(2-y)_m}\right|\right] + \right. \\[2ex]
\left. + 1 : \left[(y)_{\kappa+1}\left|(2-x)_{\kappa}\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{m}\dfrac{(y+\kappa)_m}{(1-x)_m}\right|\,\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{m}\dfrac{(y+\kappa+1)_m}{(2-x)_m}\right|\right]\right\}; \\[1ex]
0 < x \leqslant 3,\quad 0 < y \leqslant 3;\quad \kappa = 2,\,3,\,\ldots
\end{cases}
\qquad (13)
$$

$$
\begin{cases}
|r_{2\kappa+1}(x,\,y)| < \kappa!\,(x+y)_{\kappa}\,2^{1-x-y}\times \\[1ex]
\times\left\{1 : \left[(x)_{\kappa+1}\left|(2-y)_{\kappa}\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{m}\dfrac{(x+\kappa+1)_m}{(2-y)_m}\right|\,\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa+1} C_{\kappa+1}^{m}\dfrac{(x+\kappa+1)_m}{(1-y)_m}\right|\right] + \right. \\[2ex]
\left. + 1 : \left[(y)_{\kappa+1}\left|(2-x)_{\kappa}\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{m}\dfrac{(y+\kappa+1)_m}{(2-x)_m}\right|\,\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa+1} C_{\kappa+1}^{m}\dfrac{(x+\kappa+1)_m}{(1-x)_m}\right|\right]\right\}; \\[1ex]
0 < x \leqslant 3,\quad 0 < y \leqslant 3;\quad \kappa = 1,\,2,\,\ldots
\end{cases}
\qquad (14)
$$

В случае $x=y$ получим:

$$
|r_{2\kappa}(x,\,x)| < \frac{2^{2-2x}\,\kappa!\,(2x)_{\kappa} : (x)_{\kappa+1}\,|(2-x)_{\kappa}|}{\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{m}\dfrac{(x+\kappa)_m}{(1-x)_m}\right|\,\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_{\kappa}^{m}\dfrac{(x+\kappa+1)_m}{(2-x)_m}\right|}; \qquad (15)
$$

$$|r_{2\kappa+1}(x,\ x)| < \frac{2^{2-2x}\,\kappa!\,(2x)_\kappa : (x)_{\kappa+1}\,|(2-x)_\kappa|}{\left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa} C_\kappa^m \frac{(x+\kappa+1)_m}{\cdot\,(2-x)_m}\right| \left|\sum\limits_{m=0}^{\kappa+1} C_{\kappa+1}^m \frac{(x+\kappa+1)_m}{(1-x)_m}\right|}. \quad (16)$$

3. Составим таблицу относительных погрешностей для бета-функции в том случае, если для ее вычисления применить 6-е приближение равенств (9) $(0{,}0000074 = 0{,}0^5 74)$.

Таблица 1

x \ y	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9
2,2	$0{,}0^5 74$	$0{,}0^4 12$	$0{,}0^4 17$	$0{,}0^4 20$	$0{,}0^4 13$
2,4	$0{,}0^4 14$	$0{,}0^4 16$	$0{,}0^4 20$	$0{,}0^4 20$	$0{,}0^4 14$
2,6	$0{,}0^4 19$	$0{,}0^4 20$	$0{,}0^4 21$	$0{,}0^4 21$	$0{,}0^4 16$
2,8	$0{,}0^4 17$	$0{,}0^4 18$	$0{,}0^4 19$	$0{,}0^4 18$	$0{,}0^4 14$

Применяя формулу (10, 6), вычислим бета-функцию при $x = y = 2{,}5$:

$$6)\ \ B(2{,}5;\ 2{,}5) \approx \frac{1{,}639}{22{,}26} = 0{,}07362983.$$

Известно, что

$$B(2{,}5;\ 2{,}5) = \frac{3}{128}\pi = 0{,}07363108\ldots$$

Тогда для 6-го приближения $\Delta = 0{,}0^5 125$ и относительная погрешность

$$|\delta_x| < \frac{0{,}00000125}{0{,}07363} < 0{,}000017.$$

Вывод

Применяя 6-е дробно-рациональное приближение бета-функции при изменении переменных x и y на отрезке $[2,\ 3]$, можно вычислить бета-функцию с относительной погрешностью

$$|\delta_{xy}| < 0{,}00003.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.
4. Г. Бетман и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.
5. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. Изв. ТПИ, т. 131, 1965.
6. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.