

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ РОТОРА ЕМКОСТНОГО ГЕНЕРАТОРА

В. А. ЛУКУТИН, Э. Д. МОГИЛЕВСКАЯ

(Представлена научным семинаром кафедры теоретических основ электротехники  
и лаборатории роторных ЭСГ НИИ ЯФ)

Изучение емкостного или, как его еще называют, электростатического генератора (ЭСГ), схема которого представлена на рис. 1, связано с исследованием электрических полей в рабочем объеме этой машины. При этом появляется необходимость иметь информацию о величине потенциала и его градиентах в отдельных точках тела ротора, статора и газового зазора при различных режимах работы генератора.

Отыскание методов электрического расчета генератора на базе потенциальных функций электрического поля представляется очень заманчивым делом, но на этом пути встречаются огромные трудности, возникающие при использовании классических методов расчета поля для области сложной конфигурации с не менее сложными граничными условиями. Ниже предлагается приближенный аналитический метод расчета поля электростатического генератора, ротор которого снабжен проводящими электродами-транспортёрами.

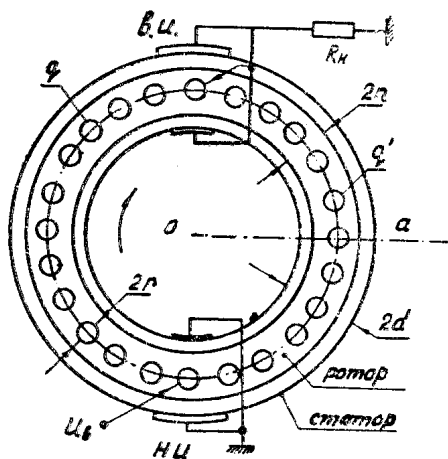


Рис. 1. Кольцевая рабочая область генератора

Если полагать диэлектрик, из которого изготовлены детали машины, идеальным и с постоянной диэлектрической проницаемостью, то для такой среды будет справедлив принцип наложения и можно сложную задачу исследования поля разбить на ряд более простых.

Так, потенциал любой точки пространства между статорными поверхностями можно представить в виде суммы двух функций, одна из которых обусловлена полем, созданным зарядами электродов статора ( $U_{ст}$ ), другая — зарядами транспортёров ротора ( $U_p$ )

$$U(x, y) = U_{ст}(x, y) + U_p(x, y). \quad (1)$$

Поскольку заряды транспортёров и индукторов не успевают сколько-нибудь заметно измениться за промежуток времени, который необходим для распространения электромагнитных возмущений между двумя наиболее удаленными точками рассматриваемой системы, то элект-

трическое поле в рабочем пространстве ЭСГ можно считать квазистационарным.

Составим расчетную модель машины, для чего сделаем ряд общепринятых допущений. Будем пренебрегать утечками зарядов по диэлектрику ротора и через газовый зазор и не будем учитывать коронирование электродов. Как правило, длина транспортеров значительно больше толщины ротора, поэтому электрическое поле между статорными поверхностями можно считать двухмерным. Наконец, кольцевую рабочую область генератора разрежем по плоскости  $oa$  (см. рис. 1) и развернем ее в прямоугольную область, как это принято в ряде работ [3, 4, 5].

Координатные оси расположим так, чтобы ось  $z$  была параллельна оси транспортеров, а ось  $x$  совпадала с плоскостью, в которой они лежат.

Набегающий участок ротора несет  $m$  транспортеров с одинаковыми зарядами  $q$ , а на каждом стержне сбегаящей части ротора остается некоторый заряд  $q'$ . Заменим эти дискретные заряды ротора непрерывными равномерно заряженными полосами с объемными плотностями зарядов

$$\rho = \frac{mq}{4lrz} \quad \text{и} \quad \rho' = \frac{mq'}{4lrz}, \quad (2)$$

где  $2m$  — количество транспортеров ротора, приходящееся на одну пару полюсов,

$2l$  — длина дуги ротора между соседними полюсами,

$2r$  — диаметр транспортеров,

$z$  — их осевая длина.

Выполнив упомянутые преобразования, мы получим изображенную на рис. 2 расчетную схему, представляющую собою сечение рабочего пространства генератора, приходящееся на одну пару полюсов. Здесь

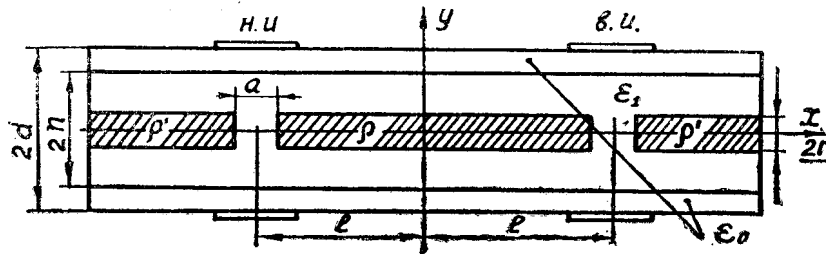


Рис. 2. Расчетная схема

$2d$  — расстояние между внутренними поверхностями статора,  $2n$  — толщина ротора,  $a$  — расстояние между осями соседних транспортеров,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость газового промежутка и  $\epsilon_1$  — проницаемость диэлектрика ротора.

Будем искать потенциальную функцию электрического поля ротора  $U_p(x, y)$ , обусловленную только зарядами транспортеров. Она будет соответствовать режиму короткого замыкания ЭСГ, работающего по кондукционной схеме возбуждения. Потенциал статорных пластин в этом случае будет равен нулю, так как они выполнены из слабопроводящего материала.

Поле в рассматриваемой области удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U_p(x, y) = - \frac{\rho(x, y)}{\epsilon}. \quad (3)$$

Граничные условия определяются более просто, если объемную плотность зарядов разложить на две составляющие:

$$\rho = \rho_a + \rho_b, \quad \rho' = -\rho_a + \rho_b, \quad (4)$$

что не противоречит принципу наложения. Последние уравнения означают, что потенциальную функцию ротора, в свою очередь, можно представить в виде двух слагаемых:

$$U_p(x, y) = U_{pa}(x, y) + U_{pb}(x, y). \quad (5)$$

Составляющая  $U_{pb}$  находится элементарно, так как поле между статорными пластинами создается равномерно заряженной полосой с плотностью заряда  $\rho_b$  и будет однородно. Совершенно очевидно, что при сделанных допущениях

$$U_{pb_0}(x, y) = U_{pb_0}(y) = \frac{\rho_b r}{\epsilon_0} (d - |y|) \quad \text{при } n \leq |y| \leq d, \quad (6)$$

$$U_{pb_1}(x, y) = U_{pb_1}(y) = \frac{\rho_b r}{\epsilon_0} (d - n) + \frac{\rho_b r}{\epsilon_1} (n - |y|) \quad \text{при } r \leq |y| \leq n.$$

Определение функции  $U_{pa}(x, y)$  сводится к решению внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta U_{pa} = -\frac{\rho_a(x, y)}{\epsilon} \quad (7)$$

при нулевых условиях на границе области

$$x = \pm l, \quad y = \pm d.$$

Решаем задачу вариационным методом, заменяя интегрирование дифференциального уравнения в частных производных (7) нахождением функции, реализующей минимум функционала [1, 2].

$$I = \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2P\varphi \right] dx dy. \quad (8)$$

Минимизирующую последовательность функций будем искать по методу Ритца.

В нашем случае область имеет неоднородный диэлектрик, поэтому для среды с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0$  координатные функции выберем такие: при  $-l \leq x \leq l, n \leq |y| \leq a$

$$U_{pa_0}(x, y) \approx A_0(l^4 - x^4)(d^2 - y^2) + B_0(l^{12} - x^{12})(d^2 - y^2), \quad (9)$$

а для области, занимаемой диэлектриком ротора  $\epsilon_1$

$$U_{pa_1}(x, y) \approx A_0(l^4 - x^4)(d^2 - n^2) + B_0(l^{12} - x^{12})(d^2 - n^2) + \\ + A_1(l^4 - x^4)(n^2 - y^2) + B_1(l^{12} - x^{12})(n^2 - y^2) \quad (10)$$

при  $-l \leq x \leq l, n \leq |y| \leq d$ .

В первом случае на границе области потенциал равен нулю, а во втором — граничные условия неоднородны. Введением новой переменной и подстановкой в (7)

$$U_{pa_1}(x, y) = \varphi(x, y) + \varphi_0(x, y)$$

получим снова уравнение Пуассона, только с другой правой частью и с нулевыми граничными условиями

$$\Delta\varphi(x, y) = -P(x, y), \quad (11)$$

где

$$\varphi = A_1 \varphi_1 + B_1 \varphi_2 = A_1 (l^4 - x^4)(n^2 - y^2) + B_1 (l^{12} - x^{12})(n^2 - y^2),$$

$$P = \frac{\rho_a(x, y)}{\varepsilon_1} + \Delta\varphi_0,$$

$$\varphi_0 = A_0 (l^4 - x^4)(d^2 - n^2) + B_0 (l^{12} - x^{12})(d^2 - n^2).$$

Для определения коэффициентов  $A_0, A_1, B_0, B_1$  составим систему уравнений. Первые два уравнения—это уравнения Ритца:

$$A_1 [\varphi_1, \varphi_1] + B_1 [\varphi_1, \varphi_2] - (P, \varphi_1) = 0; \quad (12)$$

$$A_1 [\varphi_1, \varphi_2] + B_1 [\varphi_2, \varphi_2] - (P, \varphi_2) = 0.$$

Воспользуемся известными из электростатики условиями на границе раздела двух диэлектриков:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{pa_0}}{\partial x} \Big|_{y=\pm n} &= \frac{\partial U_{pa_1}}{\partial x} \Big|_{y=\pm n}, \\ \varepsilon_0 \frac{\partial U_{pa_0}}{\partial y} \Big|_{y=\pm n} &= \varepsilon_1 \frac{\partial U_{pa_1}}{\partial y} \Big|_{y=\pm n}. \end{aligned} \quad (13)$$

В уравнениях (12) обозначены:

$[\varphi_1, \varphi_2]$  — энергетическое произведение функций;

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] dx dy;$$

$(P, \varphi) = \iint P \cdot \varphi dx dy$  — скалярное произведение функции.

Совместное решение уравнений (12), (13), (14) позволяет определить интересующие нас коэффициенты, подставив которые в формулы (9) и (10), получим приближенные составляющие аналитических функций потенциала в газовом зазоре и в диэлектрике ротора

$$U_{pa_0}(x, y) \approx \frac{\rho_a}{\varepsilon_0} \cdot \kappa (d^2 - y^2) [M(1 - x^4) + N(1 - x^{12})], \quad (15)$$

$$U_{pa_1}(x, y) \approx \frac{\rho_a}{\varepsilon_1} \kappa \left[ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} (d^2 - n^2) + (n^2 - y^2) \right] [M(1 - x^4) + N(1 - x^{12})] \quad (16)$$

где

$$\kappa = \frac{rm(3n^2 - r^2)l^2}{10^4 \left[ 4(141n^2 + 4,5) + 705 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} (d^2 - n^2) \right]},$$

$$M = \left[ 200 + 706 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} (d^2 - n^2) \right] [5 - m^4] - 62,5 \left[ 1,08 + 2,21 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} (d^2 - n^2) \right] [13 - m^{12}],$$

$$N = \left[ 3 + 5 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} (d^2 - n^2) \right] \cdot 10,13 \cdot [13 - m^{12}] - 81,4 \left[ 1,08 + 2,21 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} (d^2 - n^2) \right] [5 - m^4],$$

$$m = 1 - \frac{a}{2}.$$

Здесь все геометрические размеры отнесены к  $l$ , в том числе и переменные  $x, y$ .

Теперь просуммируем (6), (15), (16) и получим приближенные функции для вычисления потенциала электрического поля в любой точке газового зазора между ротором и статором и в теле ротора

$$U_{p_0}(x, y) = U_{p_0^b}(x, y) + U_{p_0^a}(x, y), \quad (17)$$

$$U_{p_1}(x, y) = U_{p_1^b}(x, y) + U_{p_1^a}(x, y). \quad (18)$$

С целью проверки точности расчета, производимого на основании полученных формул, было проделано большое количество экспериментов по моделированию электрических полей в электролитической ванне.

Эксперименты проводились для области, соотношение размеров которой удовлетворяет реальным образцам генераторов со стержневыми транспортерами различного сечения. На рис. 3 представлены в качестве примера значения потенциала, подсчитанные по формуле (16) для точек,

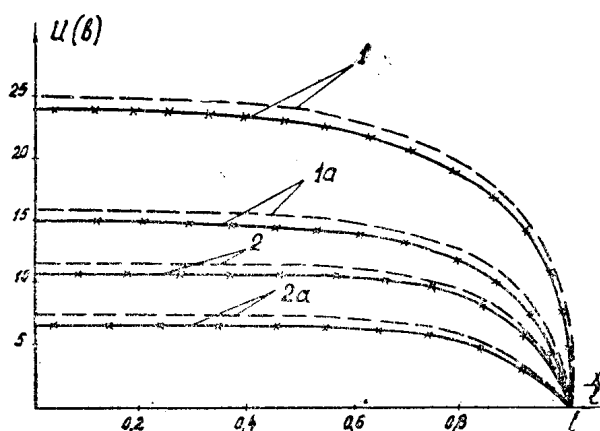


Рис. 3 Экспериментальные и расчетные кривые распределения потенциалов по транспортерам и на границе ротор—зазор

лежащих на оси  $x$  (1, 2 — пунктирные) и на поверхности ротора ( $y = \pm n$ ) (1a, 2a — пунктирные). Здесь же приведены величины потенциалов транспортеров и поверхности ротора, полученные при моделировании (сплошные кривые, крестиком обозначены экспериментальные данные). Серия кривых 1 снята и рассчитана для следующих геометрических размеров, отнесенных к  $l$ :

$$d = 8 \cdot 10^{-2}, \quad n = 6 \cdot 10^{-2}, \quad a = 8 \cdot 10^{-2}, \quad r = 2 \cdot 10^{-2} \quad \text{при} \quad \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = 4.$$

Вторая серия — для  $d = 8 \cdot 10^{-2}$ ,  $n = 6,7 \cdot 10^{-2}$ ,  $a = 10^{-1}$ ,  $r = 4 \cdot 10^{-2}$  при  $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$ .

Экспериментальные и расчетные кривые располагаются достаточно близко друг к другу, что свидетельствует о достаточно высокой точности расчетов, обеспечиваемых предлагаемыми формулами.

### Выводы

1. Получены приближенные формулы, которые позволяют весьма просто и достаточно точно определить потенциал электрического поля ротора в зазоре ротор — статор.

2. На основе этих формул легко найти нормальные и касательные составляющие напряженности электрического поля в любой точке этого же пространства.

3. Формула (18) дает достаточно точные значения потенциала на поверхности ротора и в его теле в зоне, прилегающей к этой поверхности. Весьма точно получаются значения потенциалов и самих транспортеров. В зоне между любыми соседними транспортерами потенциал подсчитывать по уравнению (18) нельзя, ибо оно не учитывает характер поля в этой области.

4. На основе вариационного метода можно получить и большую точность расчетов, если выбрать большее число слагаемых минимизирующей последовательности (10), (9), однако при этом формулы получаются более громоздкие. Кроме того, точность определяется не только количеством слагаемых, но и их формой.

5. Пользуясь потенциальными функциями (17), (18) и материалами из [5], можно легко получить уравнения линейных участков внешней характеристики, характеристики короткого замыкания электростатического генератора и определить его основные энергетические показатели.

6. Изложенная методика вычисления потенциала электрического потенциала с успехом может быть распространена и на ЭСГ с диэлектрическим ротором.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. Государственное издательство технико-теоретической литературы. М., 1957.
2. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Государственное издательство технико-теоретической литературы. М., 1949.
3. F. Ollendorf. «Field theory of self-excited influence machines». *Topics Appl. Mech.* Amsterdam—London—New York, 1965, 135—158.
4. А. П. Кононов, В. А. Лукутин, В. М. Осипов. Приближенный метод расчета поля электростатического генератора. *Изв. ТПИ*, т. 191, 1969.
5. В. А. Лукутин, Ю. И. Алексеев, А. Ф. Кочнева. Потенциальная функция для поля статора электростатического генератора. *Изв. ТПИ*, т. 210 (в печати).