ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 115 1960

К ВОПРОСУ О ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ПРИ ВНУТРЕННЕМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ

Г. П. БОЙКОВ, Ю. А. КОРОЛЕНКО

(Представлено профессором доктором Н. Д. Кутявиным)

В электротехнике очень часто возникает вопрос о температурном поле тела с внутренним тепловыделением $w \frac{ккал}{м^3\,час}$.

Нередко эти тела имеют неодинаковые значения коэффициентов теплопроводности $\lambda \frac{ккал}{м.час^\circ C}$ по направлениям осей координат (сердечники и обмотки трансформаторов и т. д.). Распределение температур в таком теле при бесконечном одном измерении и начале координат в центре тела описывается уравнениями:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial y^2} + w = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial t(0;y)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial t(x;0)}{\partial y} = 0; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \frac{\partial t(R_1;y)}{\partial x} &= \alpha\,[t(R_1;y) - t_f], \\ -\lambda_2 \frac{\partial t(x;R_2)}{\partial y} &= \alpha\,[t(x;R_2) - t_f]. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $2R_1 \leqslant 2R_2$ — измерения тела, x и y — текущие координаты, t_f — температура окружающей среды, α — коэффициент теплоотдачи.

Согласно уравнению (1) можно написать:

$$\frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial x^2}\left[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,\frac{\dfrac{\partial^2 t(x;y)}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial^2 t(x;y)}{\partial x^2}}\right] = -\frac{w}{\lambda_1},$$

$$\frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial y^2}\left[1+\frac{1}{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\,\dfrac{\dfrac{\partial^2 t(x;y)}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial^2 t(x;y)}{\partial x^2}}}\right]=-\frac{w}{\lambda_2}.$$

Считая, согласно [1], отношение составляющих расхождения градиента температуры постоянной величиной, последние соотношения представим в виде:

$$\frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial x^2}\,\xi'=-\frac{w}{\lambda_1},\qquad \frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial y^2}\,\frac{\xi'}{\xi'-1}=-\frac{w}{\lambda_2}. \tag{4}$$

Тогда
$$t(x;y)=-\frac{w\,x^2}{2\,\xi'\,\lambda_1}+f(y)\,x+\varphi(y),$$

$$t(x;y)=-\frac{w\,y^2}{2\,\lambda_2}\cdot\frac{\xi'-1}{\xi'}+f(x)\,y+\varphi(x).$$

Из условий симметрии (2) $f(x)=f(y)=0$. Учитывая это, при $x=0$ или $y=0$, получим $t(0;y)=\varphi(y)$; $t(x;0)=\varphi(x)$. Следовательно,

$$t(x;y)=-\frac{w\,x^2}{2\,\xi'\,\lambda_1}+t(0;y), \tag{5}$$

$$t(x;y)=-\frac{\xi'-1}{\xi'}\cdot\frac{w\,y^2}{2\,\lambda_2}+t(x;0). \tag{6}$$

Полагая в соотношениях (4) соответственно $x=0$ и $y=0$, получим систему обычных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 t(x;0)}{d x^2}\,\xi'=-\frac{w}{\lambda_1}\quad\text{и}\quad \frac{d^2 t(0;y)}{d y^2}\,\frac{\xi'}{\xi'-1}=-\frac{w}{\lambda_2}.$$

Их решение:

$$t(x;0)=-\frac{w\,x^2}{2\,\xi'\,\lambda_1}+D_1;\qquad t(0;y)=-\frac{\xi'-1}{\xi'}\cdot\frac{w\,y^2}{2\,\lambda_2}+D_2.$$

Так как при $x=0$ и $y=0$, $t(0;0)=t_ц$, то $D_1=D_2=t_ц$ — температуре центра тела и выражения (5) и (6) становятся одинаковыми

$$t(x;y)=t_ц-\frac{w\,x^2}{2\,\xi'\,\lambda_1}-\frac{\xi'-1}{\xi'}\cdot\frac{w\,y^2}{2\,\lambda_2}. \tag{7}$$

Уравнение (7) удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности (1) и условиям симметрии (2).

Температуру центра тела $t_ц$ и ξ' ищем исходя из условия (3), считая температуры на поверхности тела $t(R_1;y)$ и $t(x;R_2)$ постоянными, равными среднеинтегральным температурам соответствующих поверхностей:

$$-\lambda_1 \frac{\partial t(R_1;y)}{\partial x} = \alpha\,[t_{cp}(R_1;y) - t_f]; \quad -\lambda_2 \frac{\partial t(x;R_2)}{\partial y} = \alpha\,[t_{cp}(x;R_2) - t_f], \tag{8}$$

где

$$t_{cp}(R_1;y) = \frac{1}{R_2}\int_0^{R_2} t(R_1;y)\,dy = t_ц - \frac{w R_1^2}{2\xi'\lambda_1} - \frac{\xi'-1}{\xi'}\frac{w R_2^2}{6\lambda_2} = t_ц - K_*,$$

$$t_{cp}(x;R_2) = \frac{1}{R_1}\int_0^{R_1} t(x;R_2)\,dx = t_ц - \frac{w R_1^2}{6\xi'\lambda_1} - \frac{\xi'-1}{\xi'}\frac{w R_2^2}{2\lambda_2} = t_ц - K_{**}.$$

Зная значение t_{cp} и учитывая (7), уравнение (8) представим в виде:

$$\frac{w R_1}{\xi'\alpha} = t_ц - K_* - t_f \quad \text{и} \quad \frac{w R_2}{\alpha}\frac{\xi'-1}{\xi'} = t_ц - K_{**} - t_f.$$

Вычитая из первого выражения второе, получим:

$$\frac{w R_1}{\xi'\alpha} - \frac{\xi'-1}{\xi'}\frac{w R_2}{\alpha} = \frac{w R_1^2}{6\xi'\lambda_1} + \frac{\xi'-1}{\xi'}\frac{w R_2^2}{2\lambda_2} - \frac{w R_1^2}{2\xi'\lambda_1} - \frac{w R_2^2}{6\lambda_2}\frac{\xi'-1}{\xi'},$$

откуда

$$\xi' = \frac{\dfrac{R_1+R_2}{\alpha} + \dfrac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}R_1^2 + R^2}{3\lambda_2}}{\dfrac{R_2}{\alpha} + \dfrac{R_2^2}{3\lambda_2}}. \tag{9}$$

Температура центра тела

$$t_ц = t_f + w\left(\frac{R_1}{\xi'\alpha} + \frac{R_1^2}{2\xi'\lambda_1} + \frac{\xi'-1}{\xi'}\frac{R_2^2}{6\lambda_2}\right). \tag{10}$$

Значения температур, найденные по формулам (7), (9) и (10), отличаются от температур, полученных методом элементарных балансов, менее чем на 1%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Бойков. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла, Томск. Известия ТПИ, том 101, 1958.