ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 115 1960

СВЯЗЬ МЕЖДУ ИЗБЫТОЧНЫМИ ТЕМПЕРАТУРАМИ ТЕЛА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Г. П. БОЙКОВ, Ю. А. КОРОЛЕНКО

(Представлено профессором доктором И. Д. Кутявиным)

Большое число явлений теплопроводности может быть в общем виде описано дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F, \tag{1}$$

где F может зависеть от времени (нестационарный процесс) и может не зависеть от времени (стационарный процесс); $v = T - T_c$ — избыточная температура тела (разность рассматриваемой температуры и температуры окружающей среды).

Исходное уравнение (1) представим в виде двух соотношений:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(1 + \frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}}\right) = F; \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\left(1 + \frac{1}{\dfrac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}}}\right) = F.$$

Считая отношение составляющих расхождения градиента температуры

$$\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}} = \beta = \text{const}, \qquad [1]$$

находим зависимость

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Решая последнее дифференциальное уравнение классическим методом Фурье с учетом симметрии (начало координат в центре тела), получим

$$v(x; y) = D \cdot \cos(k\sqrt{\beta} \cdot y) \cdot \cos kx,$$

отсюда

$$v(0;y) = D \cdot \cos k\sqrt{\beta} \cdot y; \qquad \cos k\sqrt{\beta} \cdot y = \frac{v(0;y)}{D};$$

$$v(x;0) = D \cdot \cos \kappa x; \qquad \cos \kappa x = \frac{v(x;0)}{D}.$$

Следовательно,

$$v(x;y) = \frac{v(x;0) \cdot v(0;y)}{D};$$

при $x=y=0$ должна получиться температура центра бесконечного прямоугольного бруса. Это дает основание утверждать, что $D = v(0;0)$ — температура центра.

Поэтому

$$v(x;y) = \frac{v(x;0) \cdot v(0;y)}{v(0;0)}, \tag{2а}$$

точно так же

$$v(R_1;y) = D \cdot \cos \kappa\sqrt{\beta} y \cdot \cos \kappa R_1;$$

$$v(x;R_2) = D \cdot \cos \kappa\sqrt{\beta} R_2 \cdot \cos \kappa x;$$

$$v(x;y) = \frac{v(x;R_2) \cdot v(R_1;y)}{D \cdot \cos \kappa R_1 \cdot \cos \kappa\sqrt{\beta} R_2};$$

при $x = R_1$; $y = R_2$ должна получиться температура ребра бесконечного прямоугольного бруса. Это дает основание утверждать, что

$$D \cdot \cos \kappa R_1 \cdot \cos \kappa\sqrt{\beta} \cdot R_2 = v(R_1 R_2);$$

поэтому

$$v(x;y) = \frac{v(x;R_2) \cdot v(R_1;y)}{v(R_1;R_2)}. \tag{2б}$$

Для граничных условий, характеризующихся бесконечным коэффициентом теплоотдачи, формулы (2) дают неопределенность вида $0 \cdot 0$ и $\frac{0 \cdot 0}{0}$. Избежать неопределенность можно лишь при условии: 1) по формуле (2а) не искать значение $v(R_1;R_2)$; 2) в формуле (2б) вместо R_1 и R_2 брать несколько меньшие значения (напр., $0{,}9R_1$; $0{,}9R_2$ или $0{,}8R_1$; $0{,}8R_2$). Так как случай граничных условий при бесконечном коэффициенте теплоотдачи явление весьма редкое, большей частью создается искусственно, то сделанная оговорка по сути дела практического значения не имеет. Формулы, аналогичные (2) для параллелепипеда и цилиндра конечных размеров, получаются аналогичным методом.

Справедливость подмеченной закономерности покажем на ряде примеров.

Нестационарный процесс переноса тепла в изотропном теле при граничных условиях первого и третьего рода

Согласно [2]

$$v(x;y) = v_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) \cdot \cos \mu_n \frac{x}{R_1} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\tau) \cdot \cos \mu_m \frac{y}{R_2}; \tag{а}$$

$$v(0;y) = v_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\tau) \cdot \cos \mu_m \frac{y}{R_2}; \qquad (б)$$

$$v(x;0) = v_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) \cdot \cos \mu_n \frac{x}{R_1} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\tau); \qquad (в)$$

$$v(0;0) = v_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\tau). \qquad (г)$$

Подставляя (б), (в), (г) в (2_a), после сокращения получаем решение (а).

Стационарный процесс переноса тепла в изотропном теле при граничных условиях третьего рода и внутреннем тепловыделении

Для бруса прямоугольного сечения $2R_1 = 0{,}5\,м$; $2R_2 = 1\,м$ при $\lambda = 40 \frac{ккал}{м.\ час.\ град.}$; $\alpha = 30 \frac{ккал}{м^2\ час\ град.}$; $t_c = 0$ °C; $W = 20000 \frac{ккал}{м^3\ час}$ расчет температурного поля методом элементарных балансов дал результаты, показанные на рис. 1 (цифра в левой нижней части ячейки), там же приведены результаты расчетов по формуле (2б) (цифра в правой верхней части ячейки). Ввиду симметрии изображена четвертая часть сечения бруса.

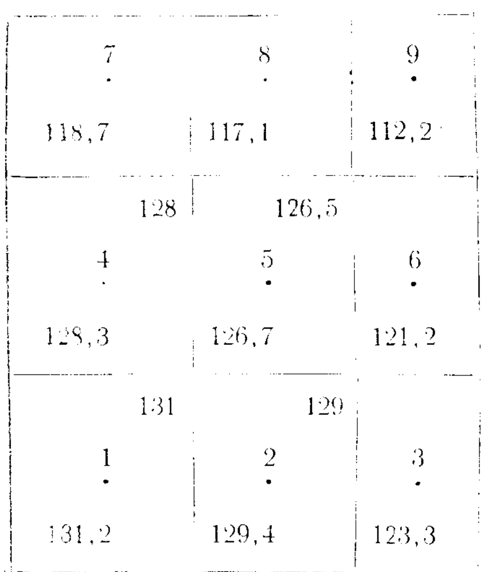

Рис. 1.

Система уравнений элементарных балансов была решена на электрическом автомате при ТГУ.

На рис. 1 точка 1 является центром тела. Ось x идет от точки 1, пересекая точки 2 и 3. Ось y — от 1 через 4 и 7. Температуры в ячейках относятся к точке в средине ячейки. Расчеты по формуле (2б) производились следующим образом:

$$v = \frac{v_3 \cdot v_7}{v_9} = 131 \qquad \left(\begin{matrix} v = t, \\ \text{так как} \\ t_c = 0 \end{matrix} \right)$$

$$v_5 = \frac{v_8 \cdot v_6}{v_9} = 126.5 \quad \text{и т. д.} \quad v_4 = 128; \; v_2 = 129.$$

Стационарный перенос тепла в анизотропном теле при граничных условиях третьего рода с внутренним тепловыделением

На рис. 2 приведены данные температурного поля в виде $v = t - 35$ °C, полученные численным решением дифференциального уравнения теплопроводности в сечении магнитопровода бетатрона [3] (цифра в левой нижней части ячейки). Здесь же приведены расчеты по формуле (2б) (цифра в правой верхней части ячейки). Ввиду симметрии изображена лишь половина сечения.

13 54,8	14 51	15 44,2	16 32,3
58,3 9 58,7	54,5 10 55	47,3 11 47,3	12 34,5
61,8 5 61,4	57,6 6 57,3	50 7 49,5	8 36,5
63,6 1 63	59,4 2 60	51,5 3 50,6	4 37,6

Рис. 2.

Расчеты по формуле (2б) производились следующим образом:

$$v_1 = \frac{v_{13} \cdot v_4}{v_{16}} = 63{,}6; \qquad v_{10} = \frac{v_{14} \cdot v_{12}}{v_{16}} = 54{,}5$$

и т. д. $v_6 = 57{,}6$; $v_9 = 58{,}3$.

Таким образом, при исследовании температурного поля в телах (когда тепло распространяется более чем в одном измерении) достаточно найти распределение температур по осям симметрии тела (брус прямоугольного сечения, параллелепипед, короткий цилиндр). Значения температур оставшейся части поля могут быть вычислены косвенно, по формуле (2а). Особую ценность для подобной же цели имеет формула (2б). Она дает возможность точно рассчитать температурное поле всей массы тела, если точно замерены соответствующие температуры на поверхности (бруса прямоугольного сечения; параллелепипеда, цилиндра конечных размеров). Она дает возможность определить температуру центра тела, когда в связи с условиями технологии к нему невозможно проникнуть с термопарой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Бойков. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла, Изв. ТПИ, т. 101, 1958.
2. А. В. Лыков. Теория теплопроводности, ГИТТЛ, М., 1952.
3. А. А. Гурченок. Расчет теплопередачи в охлаждающих пластинах магнитопровода бетатронов с воздушным охлаждением. Изв. Высш. школы. Электромеханика, № 2, 1959.