ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 228 1974.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

А. А. ЧАПКОВИЧ

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры гироскопических приборов и устройств)

Рассмотрим установившийся режим работы системы стабилизации, представленной на рис. 1. Среднеквадратическое значение выходной координаты системы стабилизации σ_h определяется воздействием двух случайных помех на систему: помехи в управляющем сигнале $n(t)$ и возмущений от порывов ветра $f(t)$. Будем далее считать заданной структурную схему системы и элементы системы $W_{10}(p)$, $W_1(p)$, $W_2(p)$, $W_3(p)$, $W_5(p)$, $W_7(p)$, $W_8(p)$, $W_9(p)$, а также характеристики помех. Как известно [1], дисперсия сигнала на выходе системы определяется выражением

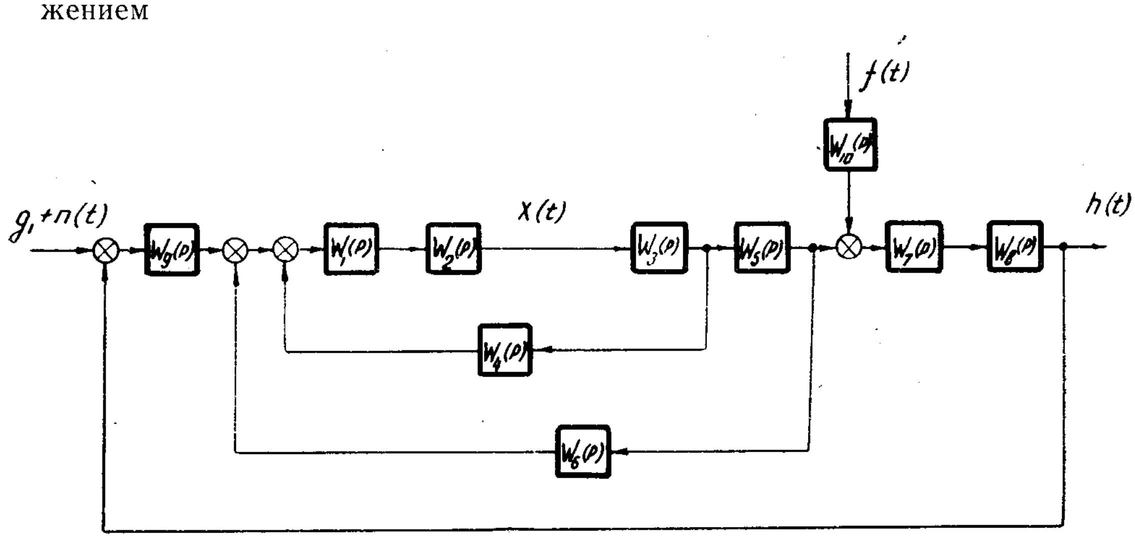

Рис. 1

$$\sigma_h^2=\int_0^\infty |K_{h_1}^n(j\omega)|^2 S_n(\omega)d\omega+\int_0^\infty |K_{h_2}^f(j\omega)|^2 S_f(\omega)\,d\omega. \qquad (1)$$

В этом выражении $S_n(\omega)$ и $S_f(\omega)$ — спектральные плотности помех, а $K_{h_1}^n(j\omega)$ и $K_{h_2}^f(j\omega)$ — частотные характеристики замкнутой системы, и соответствующие передаточной функции имеют вид

$$K_{h_1}^n(p)=\frac{W_{\text{р. с.}}(p)}{1+W_{\text{р. с.}}(p)}, \qquad (2)$$

где

$$W_{\text{р.с.}}(p)=\frac{W_9(p)W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_5(p)W_7(p)W_8(p)}{1+W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p)+W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_5(p)W_6(p)},\qquad(3)$$

и

$$K^f_{h_2}(p)=\frac{W_{10}(p)W_7(p)W_8(p)}{1+W_{\text{р.с.}}(p)}=$$

$$=W_{10}(p)W_7(p)W_8(p)[1-K^n_{h_1}(p)].\qquad(4)$$

Из рассмотрения выражений (1) и (4) видно, что влияние помех $n(t)$ и $f(t)$ на величину σ_h^2 противоречиво, и соответствующим выбором корректирующих элементов системы $W_4(p)$, $W_6(p)$ и $W_9(p)$ можно добиться минимума среднеквадратического значения выходной координаты системы. Наличие нелинейностей в системе весьма существенно влияет на ее точность. Поэтому учтем тенденцию к насыщению в элементе $W_3(p)$ системы. Для дисперсии сигнала $x(t)$ на входе элемента $W_3(p)$ имеем

$$\sigma_x^2=\int\limits_0^\infty|K^n_{x_1}(j\omega)|^2S_n(\omega)\,d\omega+\int\limits_0^\infty|K^f_{x_2}(j\omega)|^2S_f(\omega)\,d\omega.\qquad(5)$$

Передаточные функции системы, определяющие частотные характеристики $K^n_{x_1}(j\omega)$ и $K^f_{x_2}(j\omega)$, имеют вид

$$K^n_{x_1}(p)=K^n_{h_1}(p)\frac{1}{W_3(p)W_5(p)W_7(p)W_8(p)},\qquad(6)$$

$$K^f_{x_2}(p)=\frac{W_{10}(p)}{W_3(p)W_5(p)}K^n_{h_1}(p).\qquad(7)$$

Проведем далее определение оптимальной передаточной функции замкнутой системы по минимуму среднеквадратического значения выходного сигнала σ_h при учете тенденции к насыщению в элементе $W_3(p)$ системы, не накладывая ограничений на структуру корректирующих элементов $W_4(p)$, $W_6(p)$ и $W_9(p)$. Принимаем за искомую передаточную функцию

$$K(p)=K^n_{x_1}(p),$$

тогда

$$\left.\begin{aligned}K^n_{h_1}(p)&=K(p)W_{01}(p),\\ K^f_{x_2}(p)&=K(p)W_{02}(p),\\ K^f_{h_2}(p)&=W_{02}(p)[1-K(p)W_{01}(p)]\end{aligned}\right\},\qquad(8)$$

где

$$W_{01}(p)=W_3(p)W_5(p)W_7(p)W_8(p),$$
$$W_{02}(p)=W_{10}(p)W_7(p)W_8(p).$$

Как и в [2, 3], согласно методу множителей Лагранжа, составим функционал

$$I=\int\limits_0^\infty\{|K^n_{h_1}(j\omega)|^2S_n(\omega)+|K^f_{h_2}(j\omega)|^2S_f(\omega)+$$
$$+\rho|K^n_{x_1}(j\omega)|^2S_n(\omega)+\rho|K^f_{x_2}(j\omega)|^2S_f(\omega)\}\,d\omega,\qquad(9)$$

где ρ — неопределенный множитель Лагранжа.

С учетом (8) выражение (9) перепишем в виде

$$I=\int_0^\infty \{|W_{01}(j\omega)|^2|K(j\omega)|^2S_n(\omega)+|W_{02}(j\omega)|^2|1-K(j\omega)W_{01}(j\omega)|^2S_f(\omega)+$$
$$+\rho|K(j\omega)|^2S_n(\omega)+\rho|W_{02}(j\omega)|^2|K(j\omega)|^2S_f(\omega)\}\,d\omega. \qquad (10)$$

Образуем функцию сравнения $K(j\omega)+\eta(j\omega)$, близкую к $K(j\omega)$, где $\eta(j\omega)$ — произвольная вариация. Подставляем эту функцию в выражение (10) и получаем

$$I+\delta I=\int_0^\infty \{|W_{01}(j\omega)|^2|K(j\omega)+\eta(j\omega)|^2S_n(\omega)+$$
$$+|W_{02}(j\omega)|^2|1-[K(j\omega)+\eta(j\omega)]W_{01}(j\omega)|^2S_f(\omega)+$$
$$+\rho|W_{02}(j\omega)|^2|K(j\omega)+\eta(j\omega)|^2S_f(\omega)+\rho|K(j\omega)+\eta(j\omega)|^2S_n(\omega)\}\,d\omega. \qquad (11)$$

После соответствующих преобразований находим первую вариацию функции I и представляем далее ее в виде

$$\delta I=\int_0^\infty \eta(-j\omega)\{K(j\omega)[|W_{01}(j\omega)|^2S_n(\omega)+\rho|W_{02}(j\omega)|^2S_f(\omega)+$$
$$+\rho S_n(\omega)+|W_{02}(j\omega)|^2|W_{01}(j\omega)|^2S_f(\omega)]-|W_{02}(j\omega)|^2W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)\}\,d\omega+$$
$$+\int_0^\infty \eta(j\omega)\{K(-j\omega)[|W_{01}(j\omega)|^2S_n(\omega)+\rho|W_{02}(j\omega)|^2S_f(\omega)+\rho S_n(\omega)+$$
$$+|W_{02}(j\omega)|^2|W_{01}(j\omega)|^2S_f(\omega)-|W_{02}(j\omega)|^2W_{01}(j\omega)S_f(\omega)\}\,d\omega.$$

Сумму в квадратных скобках можно представить в виде произведения двух сопряженных множителей

$$|W_{01}(j\omega)|^2S_n(\omega)+\rho|W_{02}(j\omega)|^2S_f(\omega)+\rho S_n(\omega)+$$
$$+|W_{02}(j\omega)|^2|W_{01}(j\omega)|^2S_f(\omega)=\psi(j\omega)\psi(-j\omega).$$

Для вариации тогда получим

$$\delta I=\int_0^\infty \eta(-j\omega)\psi(-j\omega)\left[K(j\omega)\psi(j\omega)-\frac{|W_{02}(j\omega)|^2W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]d\omega+$$
$$+\int_0^\infty \eta(j\omega)\psi(j\omega)\left[K(-j\omega)\psi(-j\omega)-\frac{|W_{02}(j\omega)|^2W_{01}(j\omega)S_f(\omega)}{\psi(j\omega)}\right]d\omega. \qquad (12)$$

Представим далее $\dfrac{|W_{02}(j\omega)|^2W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}$ как сумму двух составляющих:

$$\frac{|W_{02}(j\omega)|^2W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}=$$
$$=\left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_+ + \left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_-, \qquad (13)$$

из которых одна составляющая

$$\left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_+$$

имеет особые точки в верхней полуплоскости комплексной переменной, а вторая составляющая

$$\left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_- -$$

в нижней полуплоскости.

Аналогично представим

$$\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(j\omega)S_f(\omega)}{\psi(j\omega)} =$$

$$= \left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(j\omega)S_f(\omega)}{\psi(j\omega)}\right]_+ + \left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(j\omega)S_f(\omega)}{\psi(j\omega)}\right]_- . \qquad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в (12), получим выражение, которое приводим к виду

$$\delta I = \int_0^\infty \eta(-j\omega)\psi(-j\omega)K(j\omega)\psi(j\omega)\,d\omega -$$

$$- \int_0^\infty \eta(-j\omega)\psi(-j\omega)\left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_+ d\omega -$$

$$- \int_0^\infty \eta(-j\omega)\psi(-j\omega)\left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_- d\omega +$$

$$+ \int_0^\infty \eta(j\omega)\psi(j\omega)K(-j\omega)\psi(-j\omega)\,d\omega -$$

$$- \int_0^\infty \eta(j\omega)\psi(j\omega)\left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(j\omega)S_f(\omega)}{\psi(j\omega)}\right]_+ d\omega -$$

$$- \int_0^\infty \eta(j\omega)\psi(j\omega)\left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(j\omega)S_f(\omega)}{\psi(j\omega)}\right]_- d\omega . \qquad (15)$$

Интегралы $\int_0^\infty \eta(-j\omega)\psi(-j\omega)\left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_- d\omega$

и $\int_0^\infty \eta(j\omega)\psi(j\omega)\left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(j\omega)S_f(\omega)}{\psi(j\omega)}\right]_+ d\omega$ равны нулю,

так как все особые точки подынтегральных выражений находятся в одной полуплоскости. С учетом этого (15) имеет вид

$$\delta I = \int_0^\infty \eta(-j\omega)\psi(-j\omega)\left\{K(j\omega)\psi(j\omega) - \left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_+\right\} d\omega +$$

$$+ \int_0^\infty \eta(j\omega)\psi(j\omega)\left\{K(-j\omega)\psi(-j\omega) - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(j\omega)S_f(\omega)}{\psi(j\omega)}\right]_-\right\} d\omega. \qquad (16)$$

Если функция $K(j\omega)$ является действительно оптимальной, то вариация δI должна быть равна нулю при любых вариациях $\eta(j\omega)$. Отсюда следует, что выражения, заключенные в фигурные скобки правой части уравнения (16), должны быть равны нулю, т. е.

$$K(j\omega)\psi(j\omega) - \left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(-j\omega)S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_+ = 0, \qquad (17)$$

$$K(-j\omega)\,\psi(-j\omega)-\left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(j\omega)\,S_f(\omega)}{\psi(j\omega)}\right]_-=0. \qquad (18)$$

Из выражения (17) получим, что оптимальная передаточная функция системы определяется следующей формулой:

$$K(j\omega)=\frac{1}{\psi(j\omega)}\cdot\left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(-j\omega)\,S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_+. \qquad (19)$$

Определив $K(j\omega)$, по выражению (8) определяем интересующие нас передаточные функции замкнутой системы.

Множитель Лагранжа ρ выбирается так, чтобы удовлетворить условию ограничения координаты $x(t)$ на входе звена $W_3(p)$, и при этом выходная координата системы будет минимальной для принятого значения ограничения величины σ_x.

Рассмотрим решение задачи при определенных спектральных плотностях помех и параметрах заданных элементов системы, полагая только для упрощения $W_{10}(p)=\dfrac{1}{V}$.

Тогда получаем

$$S_f(\omega)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{L}{V}}{1+\omega^2\left(\frac{L}{V}\right)^2}\cdot\sigma_f^2;$$

$$S_n(\omega)+\sigma_n^2\frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{\alpha^2+\Omega^2+\omega^2}{\omega^4+2\omega^2(\alpha^2-\Omega^2)+(\alpha^2+\Omega^2)^2};$$

$$W_{01}(p)=\frac{k_c V}{p^3(T_c^2p^2+2\xi_c T_c p+1)};\; W_{02}(p)=\frac{1}{p(T_v p+1)}.$$

Определим функции $\psi(j\omega)$ и $\psi(-j\omega)$:

$$\psi(j\omega)\psi(-j\omega)=\frac{k_c^2V^2\sigma_n^2\frac{\alpha}{\pi}(\alpha^2+\Omega^2+\omega^2)}{\omega^6[T_c^4\omega^4+\omega^2(4\xi_c^2T_c^2-2T_c^2)+1][\omega^4+2\omega^2(\alpha^2-\Omega^2)+(\alpha^2+\Omega^2)^2]}+$$

$$+\rho\frac{\sigma_f^2\frac{2}{\pi}\cdot\frac{L}{V}}{\omega^2(T_v^2\omega^2+1)\left[1+\omega^2\left(\frac{L}{V}\right)^2\right]}+\rho\frac{\sigma_n^2\frac{\alpha}{\pi}(\alpha^2+\Omega^2+\omega^2)}{\omega^4+2\omega^2(\alpha^2-\Omega^2)+(\alpha^2+\Omega^2)^2}+$$

$$+\frac{k_c^2V\sigma_f^2\frac{2L}{\pi}}{\omega^8(T_v^2\omega^2+1)[T_c^4\omega^4+\omega^2(4\xi_c^2T_c^2-2T_c^2)+1]\left[1+\omega^2\left(\frac{L}{V}\right)^2\right]}. \qquad (20)$$

Ввиду сложности выражения (20), дальнейшее рассмотрение целесообразно провести, задавшись определенными значениями параметров заданных элементов системы и соотношением между дисперсиями помех:

$$\sigma_n^2=4\ м^2;\ \alpha=0{,}3925;$$
$$\sigma_f^2=1\ м^2/сек^2;\ \Omega=0{,}7851^1/\,сек;$$

$$k_c = 0{,}478;\ T_v = 1{,}37\ \textit{сек};$$
$$T_c = 0{,}79\ \textit{сек};\ V = 78\ \textit{м/сек};$$
$$\xi_c = 0{,}685;\ L = 140\ \textit{м}.$$

Для случая $\rho = 1$ получаем:

$$\psi(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}, \tag{21}$$

где

$$A(j\omega) = 1{,}08(j\omega + 2{,}24)[(j\omega)^2 + 0{,}672 j\omega + 0{,}378][(j\omega)^2 + \\ + 2{,}12 j\omega + 1{,}28][(j\omega)^2 + 3{,}67 j\omega + 5{,}2][(j\omega)^2 + 1{,}44 j\omega + 5{,}155];$$

$$B(j\omega) = (j\omega)^4 [T_c^2 (j\omega)^2 + 2\xi_c T_c j\omega + 1][(j\omega)^2 + \\ + 2\alpha j\omega + \alpha^2 + \Omega^2][T_v j\omega + 1]\left[\frac{L}{V} j\omega + 1\right].$$

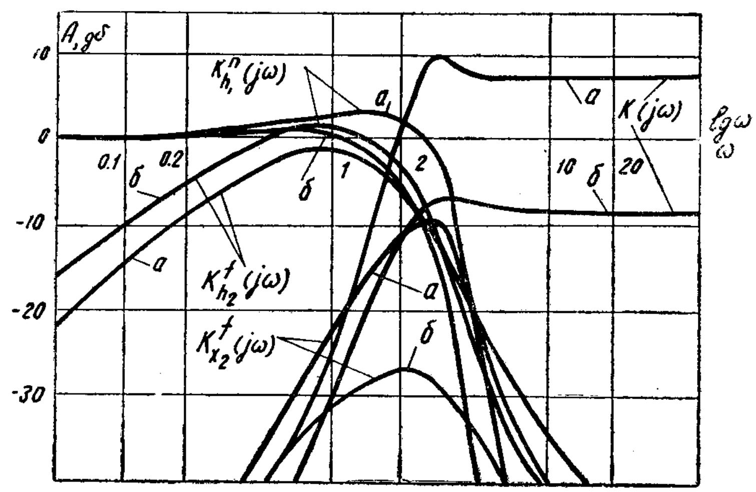

Рис. 2

Находим далее выражения для

$$\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(-j\omega) S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)};$$

$$\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(-j\omega)\, S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)} = \frac{k_c \dfrac{2}{\pi} L\sigma_f^2 [(-j\omega)^2 + 2\alpha(-j\omega) + \alpha^2 + \Omega^2]}{1{,}08 \cdot C(j\omega)}, \tag{22}$$

где

$$C(j\omega) = j\omega(T_v j\omega + 1)\left(\frac{L}{V} j\omega + 1\right)(-j\omega + 2{,}24)[(-j\omega)^2 + 0{,}672(-j\omega) + \\ + 0{,}378][(-j\omega)^2 + 2{,}12(-j\omega) + 1{,}28][(-j\omega)^2 + 3{,}67(-j\omega) + \\ + 5{,}2][(-j\omega)^2 + 1{,}44(-j\omega) + 5{,}155].$$

Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, разлагаем правую часть выражения (22) на простые дроби и выделяем ту часть этого выражения, которая имеет полюсы в левой полуплоскости комплексного переменного:

$$\left[\frac{|W_{02}(j\omega)|^2 W_{01}(-j\omega) S_f(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_+ = \frac{k_c \frac{2}{\pi} L\sigma_f^2 0{,}0266[6{,}495j\omega+1][1{,}015j\omega+1]}{1{,}08j\omega(T_v j\omega+1)\left(\frac{L}{V} j\omega+1\right)}. \quad (23)$$

Используя выражения (21) и (23), получим по (19) искомую функцию $K(j\omega)$ и далее выражения для частотных характеристик замкнутой системы. На рис. 2 построены логарифмические амплитудно-частотные характеристики замкнутой системы для случаев $\rho=1$ (характеристики а) и $\rho=5$ (характеристики б).

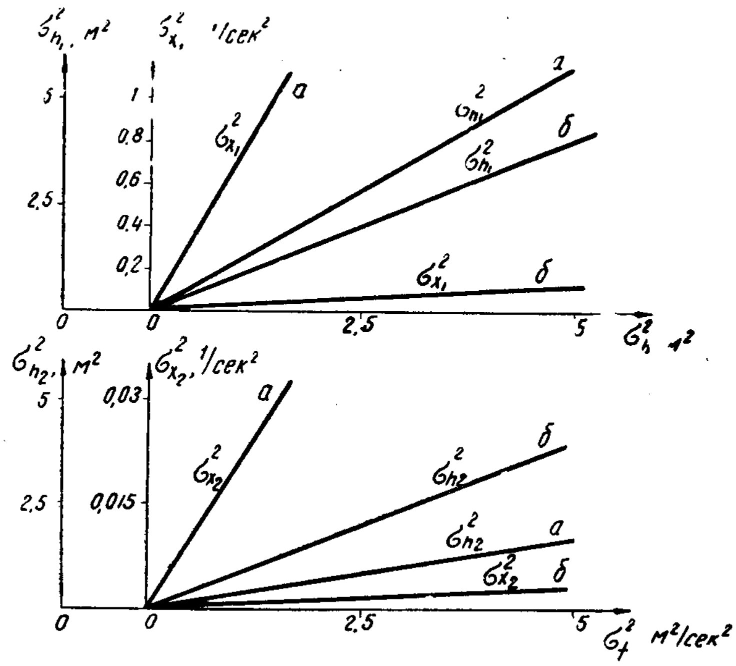

Рис. 3

Характеристики на рис. 2 позволяют определить среднеквадратическое значение выходной координаты системы стабилизации и соответствующее среднеквадратическое значение координаты на входе звена $W_3(p)$ при разных значениях ρ. На рис. 3 представлены зависимости дисперсий $\sigma^2_{h_1}$, $\sigma^2_{h_2}$, $\sigma^2_{x_1}$ и $\sigma^2_{x_2}$ от уровней помех σ^2_n и σ^2_f для случаев $\rho=1$ (графики а) и $\rho=5$ (графики б).

Рассматриваемый подход позволяет найти оптимальную передаточную функцию системы стабилизации, если не учитывать ограничения на структуру и параметры корректирующих элементов системы стабилизации. Однако определение искомой передаточной функции проводится при обычно накладываемом ограничении $k(t)=0$ при $t<0$, где $k(t)$ — импульсная переходная функция системы с передаточной функцией $K(p)$ [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Книга 2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования. «Машиностроение», М., 1967.

2. Дж. К. Ньютон, Л. А. Гулд, Дж. Ф. Кайзер. Теория линейных следящих систем. Физматгиз, М., 1961.

3. О. Б. Клешко. Синтез линейных автоматических систем по минимуму среднеквадратичной ошибки с учетом неизменяемой части системы. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 1964.