ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 229 1972

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ ЧЕБЫШЕВА

А. С. ГИТМАН, Е. С. ГИТМАН

(Представлена научным семинаром кафедр электрических машин и общей электротехники)

При подготовке задач для решения на электронных цифровых вычислительных машинах (ЭЦВМ) известную трудность представляет аппроксимация функций, заданных таблично или графически. С точки зрения использования ЭЦВМ желательно приближение функций полиномами. Хотя не существует правил по выбору метода аппроксимации полиномами, одним из важных признаков, облегчающих задачу, является характеристика исходной функции. Если функция является «точной», целесообразно получить такое приближение, при котором погрешности распределены равномерно по всему интервалу. В этом смысле фундаментальное значение имеют ортогональные полиномы Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, определенные на итервале $[-1, +1]$. Для непрерывной исходной функции, находя коэффициенты по формуле

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x)\, T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{1}$$

можно получить приближение $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} c_0 + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \dots \tag{2}$$

Отсюда видно, что основной объем вычислений связан с нахождением коэффициентов c_n. Исключая из рассмотрения редкую возможность получения первообразной для интегралов (1), будем считать, что для их нахождения необходимо использование численных методов. При относительно больших значениях степеней многочленов $T_n(x)$ применение известных методов численного интегрирования приводит к существенным погрешностям. Это связано с наличием в подинтегральном выражении (1) быстроосциллирующей функции $T_n(x)$, причем, осцилляции сгущаются к концам интервала. В связи с трудностью вычисления интегралов (1) обычно вводят замену переменной для преобразования исходной функции в периодическую и последующей тригонометрической аппроксимации [1]. Есть и другой путь. Используя идеи, родственные идеям, положенным в основу метода Филона [2], можно получить ряд аналогов квадратурных формул и, в частности, аналог формулы трапеций, который будет найден ниже.

Наибольший практический интерес представляет случай равномерного распределения опорных точек функции $f(x)$ на интервале [a, b].

Применяя линейное преобразование

$$z = \frac{a+b}{a-b} + \frac{2x}{b-a} \tag{3}$$

к исходному интервалу $[a, b]$, получим функцию $f(x)$, заданную на интервале $[-1, +1]$. Соединив последовательно ординаты соседних точек (рис. 1), найдем уравнение линий между ними.

Для участка i на интервале изменения абсциссы

$$[-1 + ih,\ -1 + (i+1)h]$$

$$f(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}(x + 1 - ih) + y_i \quad (i = 0, 1, 2 \ldots N-1), \tag{4}$$

где $h = \frac{2}{N}$ — длина интервала при числе точек $N+1$. Представим выражение (1) в виде

$$c_n = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{-1+ih}^{-1+(i+1)h} f(x)\, T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5}$$

и, используя (4), найдем значение интегралов, стоящих под знаком суммы:

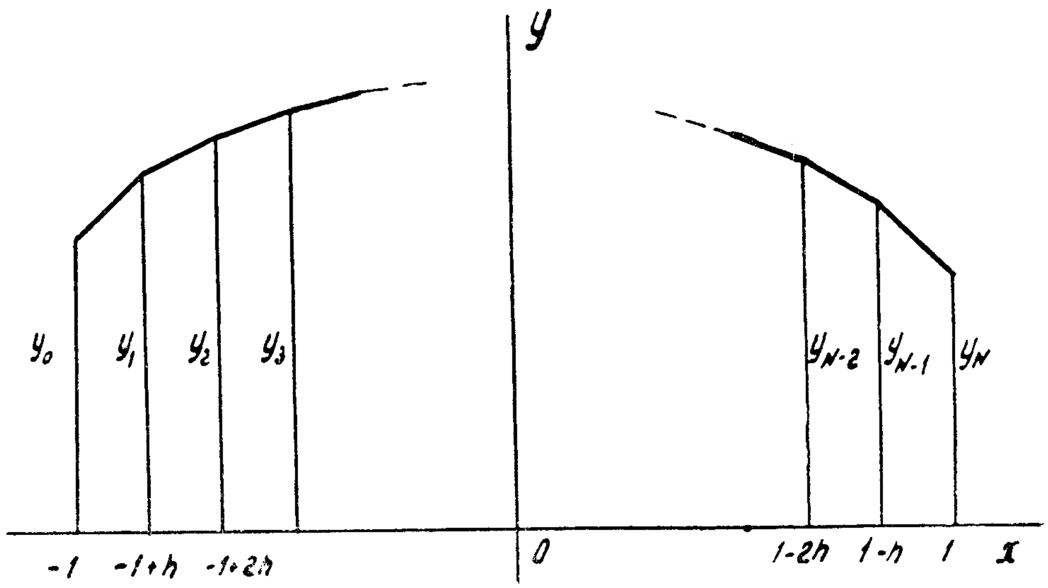

Рис. 1

$$\int\limits_{-1+ih}^{-1+(i+1)h} f(x)\, T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1+ih}^{-1+(i+1)h} \frac{(y_{i+1} - y_i)\, x \cdot \cos(n \arccos x)\, dx}{h\sqrt{1-x^2}} +$$

$$+ \int\limits_{-1+ih}^{-1+(i+1)h} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h}(1 - ih) + y_i\right] \frac{\cos(n \arccos x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6}$$

Применяем подстановку $\theta = \arccos x$. Тогда

$x = \cos\theta$, $d\theta = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и выражение (6) при $n > 1$ принимает вид

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}\int\limits_{\arccos[-1+(i+1)h]}^{\arccos(-1+ih)}\cos\theta\cos n\theta d\theta+\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h}(1-ih)+y_i\right]\int\limits_{\arccos[-1+(i+1)h]}^{\arccos(-1+ih)}\cos n\theta d\theta=$$

$$=\frac{y_{i+1}-y_i}{2h(n^2-1)}\left[(n-1)\sin(n+1)\theta+(n+1)\sin(n-1)\theta\right]\Bigg|_{\arccos[-1+(i+1)h]}^{\arccos(-1+ih)}+$$

$$+\frac{(y_{i+1}-y_i)(1-ih)+y_i h}{nh}\sin\theta\Bigg|_{\arccos[-1+(i+1)h]}^{\arccos(-1+ih)}. \qquad (7)$$

Выражение (7) можно упростить. Для этого обозначим

$$-1+ih=z_i,\ \Delta y_i=y_{i+1}-y_i,\ \arccos z_i=\alpha_i \text{ и}$$

$$\arccos(z_i+h)=\arccos[-1+(i+1)h]=\alpha_i-\delta_i.$$

Для определения δ_i можно получить уравнение

$$\cos(\alpha_i-\delta_i)=\cos\alpha_i\cos\delta_i+\sin\alpha_i\sin\delta_i=$$

$$=z_i\cos\delta_i+\sqrt{1-z_i^2}\sin\delta_i=z_i+h,$$

откуда

$$\delta_i=\arccos\{z_i(z_i+h)+\sqrt{[1-(z_i+h)^2](1-z_i^2)}\}.$$

С учетом принятых обозначений для любого m

$$\sin m\theta\Big|_{\alpha_i-\delta_i}^{\alpha_i}=2\sin\frac{m\delta_i}{2}\cos\frac{m(2\alpha_i-\delta_i)}{2}. \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и (7) в (5), найдем для $n>1$

$$c_n=\frac{2}{\pi h(n^2-1)}\sum_{i=0}^{N-1}\Delta y_i\left[(n-1)\sin\frac{(n+1)\delta_i}{2}\cos\frac{(n+1)(2\alpha_i-\delta_i)}{2}+\right.$$

$$\left.+(n+1)\sin\frac{(n-1)\delta_i}{2}\cos\frac{(n-1)(2\alpha_i-\delta_i)}{2}\right]+ \qquad (9)$$

$$+\frac{2(n^2-1)}{n}(y_i h-\Delta y_i z_i)\sin\frac{n\delta_i}{2}\cos\frac{n(2\alpha_i-\delta_i)}{2}.$$

Коэффициенты c_0 и c_1 соответственно равны

$$c_0=\frac{2}{\pi h}\sum_{i=0}^{N-1}2\Delta y_i\sin\frac{\delta_i}{2}\cos\frac{2\alpha_i-\delta_i}{2}+\delta_i(y_i h-\Delta y_i z_i) \qquad (10)$$

$$c_1=\frac{1}{\pi h}\sum_{i=0}^{N-1}\Delta y_i[\delta_i+\sin\delta_i\cos(2\alpha_i-\delta_i)]+$$

$$+4(y_i h-\Delta y_i z_i)\sin\frac{\delta_i}{2}\cos\frac{2\alpha_i-\delta_i}{2}. \qquad (11)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. ГИФМЛ, М., 1961.
2. К. Дж. Трантер. Интегральные преобразования в математической физике. ГИТЛ, М., 1956.