ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 229 1972

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИНХРОННЫХ РЕАКТИВНЫХ РЕДУКТОРНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

А. А. БУЙМОВ, Е. В. КОНОНЕНКО

(Представлена научным семинаром кафедры электрических машин и общей электротехники)

Тихоходные синхронные двигатели с электромагнитной редукцией скорости находят все более широкое применение в различных отраслях промышленности, благодаря их преимуществам перед высокоскоростными двигателями с механическими редукторами. Часто такие двигатели не имеют обмотки возбуждения постоянного тока. В этом случае они называются синхронные реактивные редукторные двигатели. Однако их применение сдерживается такими недостатками, как ограниченный пусковой момент и склонность к колебаниям скорости в синхронном режиме. Для устранения этих недостатков применяются различные дополнительные устройства, улучшающие пуск и равномерность вращения двигателя. Одним из таких устройств является короткозамкнутая клетка, расположенная в пазах ротора [6]. Применение короткозамкнутой клетки возможно для тихоходных двигателей с соотношением зубцов на роторе и статоре равным $z_2 = z_1 + 2p$, так как только в этом случае ротор вращается в одном направлении с полем статора.

При наличии короткозамкнутой клетки на роторе в синхронном реактивном редукторном двигателе возникает кроме синхронного электромагнитного момента, также асинхронный, который оказывает влияние на работу как в процессе пуска, так и в установившемся синхронном режиме. Величина асинхронного момента зависит от параметров короткозамкнутой обмотки. Для проектирования двигателей с короткозамкнутой обмоткой на роторе необходимо исследовать при каких сочетаниях параметров обмоток статора и ротора возможен лучший вариант синхронного реактивного редукторного двигателя, обладающего надежным пуском и достаточным демпфированием колебаний скорости ротора. Наиболее полные исследования различных режимов работы можно выполнить с использованием системы дифференциальных уравнений, включающих уравнения равновесия напряжений обмоток и уравнение движения ротора. Вопросы составления уравнений для синхронных реактивных редукторных двигателей наиболее подробно рассмотрены в [1, 2, 4]. Однако для более полного учета явлений, протекающих в этих двигателях, возникает необходимость еще раз вернуться к составлению и преобразованию основных уравнений синхронных реактивных редукторных двигателей с короткозамкнутой обмоткой на роторе.

При выводе уравнений предполагается, что на статоре имеется трехфазная двухполюсная обмотка. Так как учет влияния короткозамкнутой обмотки представляет при исследовании определенные трудности, в том случае, когда не ставится задача изучения токов в стержнях, ее можно заменить двумя эквивалентными обмотками с взаимно перпендикулярными осями. При замене реальной обмотки эквивалентными предполагается, что намагничивающие силы реальной и эквивалентной обмоток равны. Так как стержни короткозамкнутой обмотки расположены в каждом пазу ротора, т. е. равномерно по окружности ротора, количество витков эквивалентных обмоток по обеим осям будет одинаково. При условии синусоидального распределения тока вдоль поверхности ротора амплитуда основной гармонической н. с., созданной токами i_r в стержнях реальной обмотки, на один полюс равна [7]:

$$F_{r_1} = F_1 + F_2 + \dots + F_к = \frac{4}{\pi} I_r \left(\sin^2 \frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_1}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_2}{2} + \right.$$

$$\left. + \dots + \sin^2 \frac{\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau_к}{2} \right) = \frac{4}{\pi} I_r \left(\frac{n_c}{4} - \frac{\sin n_c \alpha_c}{4 \sin \alpha_c} \right),$$

где α_c — угол между двумя соседними стержнями; n_c — число стержней на полюсном делении; τ_k — угол между стержнями, образующими короткозамкнутый контур.

Если принять, что по эквивалентной обмотке ротора протекает ток, максимальное значение которого равно I_r, то амплитуда основной гармонической н. с., созданной этой обмоткой, составит

$$F_{э1} = \frac{4}{\pi} I_r w_э.$$

Приравнивая F_{r1} и $F_{э1}$, получим:

$$w_э = \frac{1}{4} \left(n_c - \frac{\sin n_c \alpha_c}{\sin \alpha_c} \right).$$

После подстановки значений $\alpha_c = \frac{\pi}{n_c}$, $n_c = \frac{z_2}{2p}$ получим число витков эквивалентной обмотки:

$$w_э = \frac{z_2}{8p}.$$

Ось одной обмотки совмещаем с осью одного из зубцов ротора и обозначаем pd, а ось второй обмотки pq опережает ось pd на 90 геометрических градусов. Обе обмотки неподвижны относительно ротора.

Таким образом, в синхронном реактивном редукторном двигателе на статоре имеются три фазные обмотки, а на роторе две эквивалентные обмотки. Ротор в общем случае вращается со скоростью ω_p. Основная гармоническая проводимость воздушного зазора, при вращении ротора с угловой скоростью ω_p, вращается со скоростью $к_p\, \omega_p$, где $к_p = \frac{z_2}{2p}$ — коэффициент редукции двигателя. Последнее обстоятельство усложняет вывод и преобразование уравнений.

С целью упрощения аналитических выражений при выводе основных уравнений приняты общеизвестные допущения о симметричности всех обмоток и линейности магнитной системы. Высшие гармонические магнитного поля не учитываются.

Для обмоток статора и эквивалентных обмоток ротора уравнения равновесия напряжений в фазных осях имеют вид:

$$U_a = p\Psi_a + i_a r;$$

$$U_b = p\Psi_b + i_b r; \qquad (1)$$

$$U_c = p\Psi_c + i_c r;$$

$$0 = p\Psi_{pd} + i_{pq} r_r;$$

$$0 = p\Psi_{pq} + i_{pq} r_r;$$

где U_a, U_b, U_c, i_a, i_b, i_c, i_{pd}, i_{pq} — мгновенные значения напряжений и токов;

r, r_r — активные сопротивления обмоток;

Ψ_a, Ψ_b, Ψ_c, Ψ_{pd}, Ψ_{pd} — полные потокосцепления обмоток.

$\frac{d}{dt} = p$ — оператор дифференцирования.

Полные потокосцепления определяются выражениями:

$$\Psi_a = L_a i_a + M_{ab} i_b + M_{ac} i_c + M_{apd} i_{pd} + M_{apq} i_{pq};$$

$$\Psi_b = M_{ab} i_a + L_b i_b + M_{bc} i_c + M_{bpd} i_{pd} + M_{bpq} i_{pq};$$

$$\Psi_c = M_{ac} i_a + M_{bc} i_b + L_c i_c + M_{cpd} i_{pd} + M_{cpq} i_{pq}; \qquad (2)$$

$$\Psi_{pd} = M_{apd} i_a + M_{bpd} i_b + M_{cpd} i_c + L_{pd} i_{pd} + M_{pdq} i_{pq};$$

$$\Psi_{pq} = M_{apq} i_a + M_{bpq} i_b + M_{cpq} i_c + M_{pqd} i_{pd} + L_{pq} i_{pq},$$

где L, M — индуктивности и взаимоиндуктивности обмоток.

Исследование проводимости воздушного зазора, обусловленной зубчатым строением статора и ротора, показывает, что она изменяется вдоль расточки статора по закону, близкому к синусоидальному, и имеет постоянную составляющую [4]. Пренебрегая высшими гармониками магнитной проводимости, ее можно представить в виде:

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_2 \cos\gamma$$

где $\gamma = k_p \omega_p t$ — угол, определяющий положение оси максимальной магнитной проводимости d относительно оси фазы «а».

При неподвижном роторе ($\omega_p = 0$ $\gamma = \text{const}$) волна магнитной проводимости неподвижна относительно статора и в каждой точке воздушного зазора есть величина постоянная. Если ротор будет вращаться со скоростью ω_p, то волна магнитной проводимости воздушного зазора тоже будет перемещаться вдоль расточки статора со скоростью k_p ω_p. Индуктивности и взаимоиндуктивности неподвижных обмоток статора в этом случае являются периодическими функциями угла γ:

$$L_a = L_0 + L_2 \cos 2\gamma;$$

$$L_b = L_0 + L_2 \cos(2\gamma + 120°);$$

$$L_c = L_0 + L_2 \cos(2\gamma - 120°); \qquad (3)$$

$$M_{ab} = M_0 + M_2 \cos(2\gamma - 120°);$$

$$M_{ac} = M_0 + M_2 \cos(2\gamma + 120°);$$

$$M_{bc} = M_0 + M_2 \cos 2\gamma.$$

Эквивалентные обмотки ротора вращаются вместе с ротором со скоростью ω_p и угол, определяющий положение ротора относительно статора, равен $\gamma_p = \omega_p t$. Поэтому собственные индуктивности эквивалентных обмоток ротора будут периодической функцией $\gamma - \gamma_p$

$$L_{pd} = L_{p0} + L_{p2} \cos 2(\gamma - \gamma_p); \qquad (4)$$

$$L_{pq} = L_{p0} - L_{p2} \cos 2(\gamma - \gamma_p).$$

Взаимоиндуктивность между обмотками ротора при равномерном воздушном зазоре отсутствует. Однако при изменяющейся магнитной проводимости воздушного зазора две взаимно перпендикулярные обмотки обладают коэффициентом взаимной индукции [5], который также является периодической функцией угла $\gamma - \gamma_p$:

$$M_{pdq} = M_{pqd} = M_{p2} \sin 2(\gamma - \gamma_p). \tag{5}$$

Взаимоиндуктивности между обмотками статора и ротора состоят из двух составляющих. Одна составляющая обусловлена вращением обмоток ротора относительно статора со скоростью ω_p, а вторая обусловлена вращением магнитной проводимости относительно статора со скоростью $\kappa_p \omega_p$ и относительно ротора $\kappa_p \omega_p - \omega_p$. Поэтому взаимоиндуктивности имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
M_{apd} &= M_{02} \cos \gamma_p + M_{22} \cos(2\gamma - \gamma_p);\\
M_{bpd} &= M_{02} \cos(\gamma_p - 120°) + M_{22} \cos(2\gamma - \gamma_p - 120°);\\
M_{cpd} &= M_{02} \cos(\gamma_p + 120°) + M_{22} \cos(2\gamma - \gamma_p + 120°);\\
M_{apq} &= -M_{02} \sin \gamma_p + M_{22} \sin(2\gamma - \gamma_p);\\
M_{bpq} &= -M_{02} \sin(\gamma_p - 120°) + M_{22} \sin(2\gamma - \gamma_p - 120°);\\
M_{cpq} &= -M_{02} \sin(\gamma_p + 120°) + M_{22} \sin(2\gamma - \gamma_p + 120°).
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Уравнения (1) с учетом (3), (4), (5) и (6) являются дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, решение которых в общем виде невозможно. Для того, чтобы упростить рассматриваемые уравнения и избавиться от периодических коэффициентов, применяются преобразования координат [3, 5]. Избавиться от периодических коэффициентов в уравнениях синхронных реактивных редукторных двигателей позволяет выбор новой системы координат, жестко связанной с магнитной проводимостью воздушного зазора. Ось максимальной магнитной проводимости воздушного зазора принята в качестве продольной оси d, а поперечная ось q опережает продольную на 90 эл. градусов и совпадает с осью минимальной магнитной проводимости воздушного зазора.

При преобразовании уравнений вначале производится переход от действительных переменных в осях статора a, b, c к новым переменным в осях α, β. Связь между переменными определяется выражениями вида:

$$i_\alpha = \frac{2}{3}\left[i_a - \frac{1}{2}(i_b + i_c) \right];$$

$$i_\beta = \frac{i_b - i_c}{\sqrt{3}}.$$

Затем осуществляется переход от переменных в осях α, β к переменным в осях d, q, вращающихся со скоростью $\kappa_p \omega_p$:

$$i_d = i_\alpha \cos\gamma + i_\beta \sin\gamma;$$

$$i_q = -i_\alpha \sin\gamma + i_\beta \cos\gamma.$$

Переход от осей pd, pq эквивалентных обмоток ротора к осям d, q производится непосредственно с помощью выражений:

$$i_{rd} = i_{pd} \cos(\gamma - \gamma_p) + i_{pq} \sin(\gamma - \gamma_p);$$

$$i_{rq} = -i_{pd} \sin(\gamma - \gamma_p) + i_{pq} \cos(\gamma - \gamma_p).$$

Такого вида преобразованиям подвергаются токи, напряжения и потокосцепления обмоток. В результате этих преобразований получается система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
U_d &= p\Psi_d - \Psi_q \cdot p\gamma + r i_d;\\
U_q &= p\Psi_q + \Psi_d p\gamma + r i_q;\\
0 &= p\Psi_{rd} - \Psi_{rq} p(\gamma - \gamma_p) + r_r i_{rd};\\
0 &= p\Psi_{rq} + \Psi_{rd} p(\gamma - \gamma_p) + r_r i_{rq},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где

$$\Psi_d = L_d i_d + M'_{rd} i_{rd};$$

$$\Psi_q = L_q i_q + M'_{rq} i_{rq};$$

$$\Psi_{rd} = M_{rd} i_d + L_{rd} i_{rd};$$

$$\Psi_{rq} = M_{rq} i_q + L_{rq} i_{rq};$$

$$L_d = L_0 - M_0 + \frac{3}{2} L_2; \qquad L_q = L_0 - M_0 - \frac{3}{2} L_2;$$

$$M'_{rd} = M_{02} + M_{22}; \quad M'_{rq} = M_{02} - M_{22};$$

$$M_{rd} = \frac{3}{2}(M_{02} + M_{22}); \quad M_{rq} = \frac{3}{2}(M_{02} - M_{22});$$

$$L_{rd} = L_{p0} + L_{p2}; \qquad L_{rq} = L_{p0} - L_{p2}.$$

Для исследования электромеханических переходных процессов система уравнений (7) должна быть дополнена уравнением движения ротора:

$$I p\omega_p = M - M_c. \tag{8}$$

Для упрощения исследования уравнений необходимо все величины выразить в относительных единицах. В качестве базисных величин целесообразно выбирать общепринятые:

1) Амплитудное значение номинального фазного напряжения обмотки статора

$$U_б = U_{mн}.$$

2) Амплитудное значение номинального фазного тока статора

$$I_б = I_{mн}.$$

3) Синхронная угловая частота

$$\omega_б = 2\pi f_н.$$

4) Номинальную мощность двигателя

$$P_б = 3U_н I_н = \frac{3}{2} U_б \cdot I_б.$$

5) Момент вращения

$$M_б = \frac{P_б \cdot \kappa_p}{\omega_б}.$$

6) Время, соответствующее повороту проводимости при базовой угловой частоте на 1 эл. радиан,

$$t_б = \frac{1}{\omega_б} = \frac{1}{2\pi f_н} \quad \text{эл. сек.}$$

Чтобы не выбирать при расчетах различные системы базисных величин для обмоток статора и ротора, необходимо обмотки ротора привести к обмоткам статора. Коэффициенты приведения целесообразно определять исходя из равенства основных гармонических н. с. приведенной и эквивалентной обмоток. Приравнивая амплитуды первых гармонических н. с. обмотки статора и эквивалентной обмотки ротора, можно определить коэффициенты приведения токов:

$$m_{Jd} = m_{Jq} = \frac{m}{2} \frac{w_1 \kappa_{об1}}{2pw_э}.$$

В преобразованных уравнениях ротора взаимоиндуктивности в результате линейных преобразований увеличены в 3/2 раза и поэтому стали необратимыми. Для того, чтобы взаимные индуктивности стали обратимыми, необходимо коэффициенты приведения напряжений выбрать равными

$$m_{Ud} = m_{Uq} = \frac{2}{m} m_{Jd}.$$

После подстановки в уравнения напряжений обмоток ротора приведенных значений токов и умножения уравнений на коэффициент приведения напряжений активные сопротивления эквивалентных обмоток и индуктивности принимают вид:

$$R_r' = m_U \cdot m_J \cdot r_r; \quad L_r' = m_U \cdot m_J \cdot L_r.$$

Следует отметить, что написание системы уравнений в относительных единицах не отличается от системы уравнений (7), если иметь в виду, что все величины в этих уравнениях выражены в относительных единицах.

Выражение для электромагнитного момента двигателя можно получить из рассмотрения баланса мощностей. Мощность, подводимая к обмотке статора, в относительных единицах равна:

$$P = \frac{2}{3}(U_a i_a + U_b i_b + U_c i_c). \tag{9}$$

Преобразуя фазные величины токов и напряжений через их составляющие, можно получить мощность в осях d, q:

$$P = U_d i_q + U_q i_d.$$

После подстановки значений U_d и U_q из (7) эта формула принимает вид:

$$P = (i_d p\Psi_d + i_q p\Psi_q) + p\gamma(i_q \Psi_d - i_d \Psi_q) + r(i_d^2 + i_q^2). \tag{10}$$

Мощность, потребляемая двигателем из сети, равна сумме мощности, идущей на изменение магнитной энергии машины, электромагнитной мощности, передаваемой через воздушный зазор, и мощности, расходуемой на нагрев обмоток статора.

Электромагнитная мощность $P_м$, передаваемая через воздушный зазор, в свою очередь расходуется на создание электромагнитного момента вращения и на потери в обмотке ротора. Если вычесть из $P_м$ потери в обмотке ротора и поделить оставшуюся механическую мощность на угловую скорость ротора, то после преобразований получим формулу для электромагнитного момента вращения в относительных единицах:

$$M = (\Psi_d i_q - i_d \Psi_q) - \frac{\kappa_p - 1}{\kappa_p}(\Psi_{rq} i_{rd} - \Psi_{rd} i_{rq}). \tag{11}$$

При исследовании электромеханических переходных процессов возможны различные формы записи полной системы уравнений. Однако для удобства ее решения на аналоговых вычислительных машинах необходимо выразить некоторые постоянные и переменные величины в том виде, в котором они могут быть замерены экспериментально на реальных машинах, и в той форме, в которой они могут быть наиболее просто рассчитаны. Поэтому в уравнениях нужно заменить производные углов через скорость вращения ротора:

$$p\gamma = \kappa_p \omega_p;$$

$$p(\gamma - \gamma_p) = (\kappa_p - 1)\omega_p.$$

Токи статора и ротора целесообразно выразить через потокосцепления и параметры обмоток двигателя:

$$x_d = x_{ad} + x_{ss};\ x_{rd} = x_{ad} + x_{sr};$$

$$x_q = x_{aq} + x_{ss};\ x_{rq} = x_{aq} + x_{sr},$$

где x_{ad}, x_{aq} — сопротивления взаимоиндукции обмоток статора;
x_{ss}, x_{sr} — сопротивления рассеяния обмоток статора и ротора.

Для определения влияния нагрузки, а также характера колебаний скорости в синхронном режиме необходимо ввести, как и в обычных синхронных машинах, угол Θ. Так как выбранная система координат d, q вращается со скоростью $\kappa_p \omega_p$, а вектор подводимого в обмотке статора напряжения вращается с постоянной, синхронной скоростью, то положение магнитной проводимости воздушного зазора определяется углом Θ между осью q и результирующим вектором напряжения:

$$\Theta = (\omega_1 - \kappa_p \omega_p)\,t. \tag{12}$$

Тогда составляющие напряжения в осях d, q, выраженные в функции угла Θ, принимают вид:

$$U_d = -U\sin\Theta;\ U_q = U\cos\Theta. \tag{13}$$

С учетом этих преобразований получаем систему уравнений, наиболее удобную для решения на аналоговых вычислительных машинах:

$$\begin{aligned}
p\Psi_d &= -U\sin\Theta + \kappa_p\omega_p\Psi_q - r\cdot i_d;\\
p\Psi_q &= U\cos\Theta - \kappa_p\omega_p\Psi_d - r\cdot i_q;\\
p\Psi_{rd} &= (\kappa_p - 1)\omega_p\Psi_{rq} - r_r i_{rd};\\
p\Psi_{rq} &= -(\kappa_p - 1)\omega_p\Psi_{rd} - r_r i_{rq};\\
i_d &= \frac{x_{rd}}{x_d x_{rd} - x_{ad}^2}\Psi_d - \frac{x_{ad}}{x_d x_{rd} - x_{ad}^2}\Psi_{rd};\\
i_q &= \frac{x_q}{x_q x_{rq} - x_{aq}^2}\Psi_q - \frac{x_{aq}}{x_q x_{rq} - x_{aq}^2}\Psi_{rq};\\
i_{rd} &= -\frac{x_{ad}}{x_d x_{rd} - x_{ad}^2}\Psi_d + \frac{x_d}{x_d x_{rd} - x_{ad}^2}\Psi_{rd};\\
i_{rq} &= -\frac{x_{aq}}{x_q x_{rq} - x_{aq}^2}\Psi_q + \frac{x_q}{x_q x_{rq} - x_{aq}^2}\Psi_{rq};\\
H_p\omega_p &= (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) - \frac{\kappa_p - 1}{\kappa_p}(\Psi_{rq} i_{rd} - \Psi_{rd} i_{rq}) - M_c;\\
p\Theta &= \omega_1 - \kappa_p\omega_p,
\end{aligned} \tag{14}$$

где $H = \dfrac{I\,\omega^3}{P_б \kappa_p^2}$ — механическая постоянная вращающихся масс.

Данная система уравнений позволяет производить исследования влияния параметров и нагрузки на различные режимы работы синхронного реактивного редукторного двигателя. Например, изменяя в широких пределах величину активного сопротивления короткозамкнутой обмотки ротора, можно проанализировать влияние r_r на возможность и продолжительность пуска, на величину пусковых токов и момент, на характер колебаний скорости вращения ротора как при пуске, так и в синхронном режиме.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Ю. Каасик. Уравнения для исследования режимов работы тихоходных безредукторных электрических машин. Сб.: «Электродвигатели малой мощности». Изд. АН СССР, Л., 1971.

2. П. Ю. Каасик, Ю. Ф. Кокунов, А. А. Пухов. К теории субсинхронных реактивных двигателей. Сб.: «Электрические машины малой мощности». Л., 1970.

3. А. И. Важнов. «Основы теории переходных процессов синхронной машины». Госэнергоиздат, 1960.

4. П. Ю. Каасик, Б. В. Сидельников. Метод математического анализа нестационарных режимов субсинхронных реактивных двигателей. Тр. вузов Литовской ССР, Электроника и автоматика, VI, 1970.

5. Л. Н. Грузов. Методы математического исследования электрических машин. Госэнергоиздат, 1953.

6. А. С. Куракин. Короткозамкнутая клетка, как пусковое средство синхронных редукторных двигателей. «Электромеханика», 1969, № 1.

7. Е. В. Кононенко. Синхронные реактивные машины. Изд-во «Энергия», 1970.