ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 115 1960

СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ, ВЫРАЖЕННЫХ ЗАКОНОМ СТЕФАНА-БОЛЬЦМАНА, И ВНУТРЕННЕМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ

Г. П. БОЙКОВ, Ю. А. КОРОЛЕНКО

(Представлено профессором доктором Кутявиным И. Д.)

В качестве примера рассмотрим тело бесконечной длины прямоугольного сечения, для которого

$$\frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial y^2}+\frac{w}{\lambda}=0 \qquad \begin{pmatrix}-R_1\leqslant x\leqslant +R_1\\ -R_2\leqslant y\leqslant R_2\end{pmatrix}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial t(0;y)}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial t(x;0)}{\partial y}=0; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} -\lambda\frac{\partial t(R_1;y)}{\partial x}&=\varepsilon_n C_0\left[\left(\frac{T(R_1;y)}{100}\right)^4-\left(\frac{T_f}{100}\right)^4\right],\\ -\lambda\frac{\partial t(x;R_2)}{\partial y}&=\varepsilon_n C_0\left[\left(\frac{T(R_2;x)}{100}\right)^4-\left(\frac{T_f}{100}\right)^4\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $w\,\frac{ккал}{м^3час}$ — внутреннее тепловыделение, одинаковое по всему объему тела,

$\lambda\,\frac{ккал}{м.\,час.\,град}$ — коэффициент теплопроводности,

ε_n — приведенная степень черноты системы,

T_f — температура окружающей среды, $R_1 \leqslant R_2$ — измерения тела, x и y — текущие координаты.

Уравнению (1) можно придать форму

$$\frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial x^2}\left[1+\frac{\dfrac{\partial^2 t(x;y)}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial^2 t(x;y)}{\partial x^2}}\right]=-\frac{w}{\lambda},$$

$$\frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial y^2}\left[1+\frac{1}{\dfrac{\dfrac{\partial^2 t(x;y)}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial^2 t(x;y)}{\partial x^2}}}\right]=-\frac{w}{\lambda}.$$

Считая, согласно [1], отношение составляющих расхождения градиента температуры постоянной величиной, последние соотношения представим в виде:

$$\frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial x^2}\xi=-\frac{w}{\lambda};\qquad \frac{\partial^2 t(x;y)}{\partial y^2}\frac{\xi}{\xi-1}=-\frac{w}{\lambda}. \tag{4}$$

Отсюда

$$t(x;y)=-\frac{wx^2}{2\xi\lambda}+f(y)x+\varphi(y),$$

$$t(x;y)=-\frac{\xi-1}{\xi}\frac{wy^2}{2\lambda}+f(x)y+\varphi(x).$$

На основании условий симметрии (2)

$$f(x)=f(y)=0$$

и

$$t(x;y)=-\frac{wx^2}{2\xi\lambda}+\varphi(y),$$

$$t(x;y)=-\frac{\xi-1}{\xi}\frac{wy^2}{2\lambda}+\varphi(x).$$

Для центральных условий (когда $x=0$ или $y=0$) получим соответственно

$$t(0;y)=\varphi(y);\ t(x;0)=\varphi(x)$$

и

$$t(x;y)=-\frac{wx^2}{2\xi\lambda}+t(0;y), \tag{5}$$

$$t(x;y)=-\frac{\xi-1}{\xi}\frac{wy^2}{2\lambda}+t(x;0). \tag{6}$$

Полагая в (4) соответственно $x=0$ и $y=0$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 t(x;0)}{dx^2}\xi=-\frac{w}{\lambda};\qquad \frac{d^2 t(0;y)}{dy^2}\frac{\xi}{\xi-1}=-\frac{w}{\lambda}.$$

Их решение

$$t(x;0)=-\frac{wx^2}{2\xi\lambda}+D_1;\qquad t(0;y)=-\frac{\xi-1}{\xi}\frac{wy^2}{2\lambda}+D_2.$$

Так как при $x=0$ и $y=0$ получаем $t(0;0)=D$, то $D_1=D_2=D$ и выражения (5) и (6) становятся тождественными

$$t(x;y)=D-\frac{wx^2}{2\xi\lambda}-\frac{\xi-1}{\xi}\,\frac{wy^2}{2\lambda}. \tag{7}$$

Решение (7) удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности (1) и условиям симметрии (2).

Неизвестные постоянные ξ и D определяем из уравнений (3), положив в них

$$T(R_1;y)=T_{cp}(R_1;y)=\frac{1}{R_2}\int\limits_0^{R_2}T(R_1;y)\,dy=D-\frac{wR_1^2}{2\xi\lambda}-\frac{\xi-1}{\xi}\,\frac{wR_2^2}{6\lambda},$$

$$T(x;R_2)=T_{cp}(x;R_2)=\frac{1}{R_1}\int\limits_0^{R_1}T(x;R_2)\,dx=D-\frac{\xi-1}{\xi}\,\frac{wR_2^2}{2\lambda}-\frac{wR_1^2}{6\xi\lambda}.$$

Подставляя в (3) соответствующие значения температур, получим:

$$\frac{wR_1}{\xi\varepsilon_n C_0}+\left(\frac{T_f}{100}\right)^4=\left(\frac{D-\frac{wR_1^2}{2\xi\lambda}-\frac{\xi-1}{\xi}\,\frac{wR_2^2}{6\lambda}}{100}\right)^4,$$

$$\frac{\xi-1}{\xi}\,\frac{wR_2}{\varepsilon_n C_0}+\left(\frac{T_f}{100}\right)^4=\left(\frac{D-\frac{\xi-1}{\xi}\,\frac{wR_2^2}{2\lambda}-\frac{wR_1^2}{6\xi\lambda}}{100}\right)^4. \tag{8}$$

Решая систему уравнений (8) относительно D и ξ, получим:

$$D=100\sqrt[4]{\frac{wR_1}{\xi\varepsilon_n C_0}+\left(\frac{T_f}{100}\right)^4}+\frac{wR_1^2}{2\xi\lambda}+\frac{\xi-1}{\xi}\,\frac{wR_2^2}{6\lambda}. \tag{9}$$

$$\sqrt[4]{\frac{wR_1}{\xi\varepsilon_n C_0}+\left(\frac{T_f}{100}\right)^4}-\sqrt[4]{\frac{wR_2}{\varepsilon_n C_0}\,\frac{\xi-1}{\xi}+\left(\frac{T_f}{100}\right)^4}=$$

$$=\frac{w}{300\lambda}\left(\frac{\xi-1}{\xi}R_2^2-\frac{R_1^2}{\xi}\right). \tag{10}$$

Уравнение (10) используется для определения ξ, так как все остальные величины, входящие в него, известны из исходных условий.

Затем из уравнения (9) рассчитывается D—температура центра тела, а по уравнению (7)—все температурное поле тела.

Значения температур, найденных по формулам (7), (9) и (10), в различных точках поперечного сечения металлического бруса совпадают с данными, полученными методом элементарных балансов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Бойков. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла". Известия ТПИ, т. 101, Томск, 1958.