ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ С. М. КИРОВА

Том 230 1972

# К АНАЛИЗУ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В. М. ОСИПОВ, А. Н. БАРКОВСКИЙ

(Представлена научным семинаром
кафедры автоматики и телемеханики)

В работе дается определение вероятностных характеристик выходного случайного процесса одномерной линейной нестационарной системы по известным корреляционной функции и математическом ожидании случайного воздействия на основании изложенного в [1], [2], [3] метода.

Пусть одномерная линейная система описывается уравнением

$$Ay = Bx, \tag{1}$$

где $A$ и $B$ — дифференциальные операторы вида

$$\left.\begin{aligned} A &= a_0(t)\frac{d^n}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t); \\ B &= b_0(t)\frac{d^m}{dt^m} + b_1(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + b_m(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Согласно общей теории линейных преобразований [4], математическое ожидание преобразуется тем же оператором, что и оператор, осуществляющий преобразование случайной функции. В применении к (1) это означает

$$Am_y(t) = Bm_x(t). \tag{3}$$

Таким образом, для определения математического ожидания выходного случайного процесса достаточно проинтегрировать уравнение (1) при $x = m_x(t)$. При этом за начальные условия принимаются неслучайные значения выходного процесса и его производных. Следуя [1], [2], интегрирование уравнения (1) сводится к решению системы алгебраических уравнений, определяющих коэффициенты разложения искомого решения в ряд по экспоненциальным полиномам Чебышева 1-го рода [5]. Если начальные условия нулевые, то, согласно [3], мы можем ввести в рассмотрение так называемую матрицу преобразования системы, устанавливающую взаимнооднозначное соответствие между входным и выходным сигналами системы, когда в качестве последних выступают «точечные» векторы вида

$$\begin{aligned} X &= \{x(t_1),\ x(t_2), \dots,\ x(t_{n+1})\}; \\ Y &= \{y(t_1),\ y(t_2), \dots,\ y(t_{n+1})\}; \end{aligned} \tag{4}$$

$x(t)$ — входной сигнал системы;

$y(t)$ — выходной сигнал системы;

$t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ — конкретные значения аргумента, называемые узлами интерполяции.

При известной матрице преобразования $W$, будем иметь [3].

$$Y = WX. \tag{4}$$

Матрица преобразования системы может быть найдена в результате интегрирования уравнения (1) по методике, изложенной в [2].

При дальнейшем изложении будем считать, что мы каким-либо образом определили матрицу преобразования системы, описываемой уравнением (1). В этом случае вектор математического ожидания случайного процесса определится из уравнения

$$M_Y = WM_X;$$

$$M_Y = \{m_y(t_1),\ m_y(t_2), \ldots ,\ m_y(t_{n+1})\}; \tag{5}$$

$$M_X = \{m_x(t_1),\ m_x(t_2), \ldots ,\ m_x(t_{n+1})\},$$

Восстановление математического ожидания $m_y(t)$ как непрерывной функции по известному вектору $M_Y$ следует проводить методом интерполирования [6], используя в качестве координатных функций экспоненциальные полиномы Чебышева 1-го рода.

Общая теория линейных преобразований позволяет показать, что для определения корреляционной функции выходного случайного процесса, мы должны решить следующих два уравнения

$$\left.\begin{aligned} A_t K_{yx}(t,\ \tau) &= B_t K_{xx}(t,\ \tau) \\ A_\tau K_{yy}(t,\ \tau) &= B_\tau K_{yx}(t,\ \tau) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Индексы $t$ и $\tau$ при операторах означают, что первое уравнение мы должны интегрировать по $t$, принимая $\tau$ в качестве параметра, второе уравнение интегрируем по $\tau$, считая $t$ параметром.

Необходимость иметь взаимную корреляционную функцию $K_{yx}(t,\tau)$ как функцию параметра $\tau$ требует многократного интегрирования первого из уравнений (6) при различных значениях параметра $\tau$.

Очевидно, что это многократное интегрирование не будет затруднительным, если, как мы ранее предположили, известна матрица преобразования системы $W$. Можно показать, что в этом случае процесс решения уравнений (6) будет сводиться к следующему:

1 — по известной корреляционной функции входного случайного процесса составляется матрица вида

$$K_{xx}(t_i,\ \tau_i) = \begin{bmatrix} K_{xx}(t_1,\ \tau_1) & K_{xx}(t_1,\ \tau_2) \ldots & K_{xx}(t_1,\ \tau_{n+1}) \\ K_{xx}(t_2,\ \tau_1) & K_{xx}(t_2,\ \tau_2) \ldots & K_{xx}(t_2,\ \tau_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{xx}(t_{n+1},\ \tau_1) & K_{xx}(t_{n+1},\ \tau_2) \ldots & K_{xx}(t_{n+1},\ \tau_{n+1}) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$; $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n+1}$ — узлы интерполяции [2], [3];

2 — находится матрица

$$K_{yx}(t_i,\ \tau_i) = WK_{xx}(t_i,\ \tau_i), \tag{8}$$

где

$W$ — матрица преобразования системы;

$K_{yx}(t_i,\ \tau_i)$ — матрица, совпадающая по виду с матрицей (7).

$$K_{yx}(t_i, \tau_i)=\begin{bmatrix} K_{yx}(t_1, \tau_1)\, K_{yx}(t_1, \tau_2) \dots K_{yx}(t_1, \tau_{n+1}) \\ K_{yx}(t_2, \tau_1)\, K_{yx}(t_2, \tau_2) \dots K_{yx}(t_2, \tau_{n+1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K_{yx}(t_{n+1}, \tau_{n+1}) K_{yx}(t_{n+1}, \tau_2) \dots K_{yx}(t_{n+1}, \tau_{n+1}) \end{bmatrix}; \qquad (9)$$

3 — находится корреляционная матрица выходного случайного процесса системы по формуле

$$K_{yy}(t_i, \tau_i = W K_{yx}^T(t_i, \tau_i) \qquad (10)$$

$K_{yx}^T(t_i, \tau_i)$ — матрица, равная транспонированной матрице $K_{yx}(t_i\ \tau_i)$ Учитывая (8), (10), можно записать

$$K_{yy}(t_i, \tau_i) = W K_{xx}^T(t_i, \tau_i) W^T \qquad (11)$$

или, памятуя о симметричности матрицы $K_{xx}(t_i, \tau_i)$,

$$K_{yy}(t_i, \tau_i) = W K_{xx}(t_i, \tau_i) W^T. \qquad (12)$$

Восстановление автокорреляционной функции выходного процесса, как функции двух аргументов при известной матрице (12), проводится методом интерполирования сначала по одному, а затем по другому аргументам.

В результате получим билинейную форму, матрица которой представляет собой матрицу коэффициентов разложения корреляционной функции выходного процесса в двойной ряд Фурье по системе экспоненциальных полиномов Чебышева.

$$T_i(t) T_j(\tau) \quad (i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots,\ n)$$

$$K_{yy}(t, \tau) = \frac{4}{n^2} T^T(t) A^T W K_{xx}(t_i, \tau_i) W^T A T(\tau). \qquad (13)$$

$T(\tau)$ — вектор-столбец «е»— полиномов Чебышева

$$T(\tau) = \{T_0^*(\tau),\ T_1^*(\tau), \dots,\ T_n^*(\tau)\};$$

$T^T(t)$ — вектор-строка «е»— полиномов

$$T^T(t) = \{T_0^*(t),\ T_1^*(t), \dots,\ T_n^*(t)\};$$

$A$ — так называемая интерполяционная матрица [6];

$A^T$ — матрица, равная транспонированной матрице $A$.

В заключение отметим, что при определении статистических характеристик нестационарных систем возможен и другой подход.

Будем считать, что входной сигнал задан случайным вектором вида (3).

$$X = \{x(t_1),\ x(t_2), \dots,\ x(t_{n+1})\};$$

тогда, согласно (4), выходной случайный вектор определяется выражением

$$Y = \{y(t_1),\ y(t_2), \dots,\ y(t_{n+1})\} = WX. \qquad (14)$$

Используя интерполяционный процесс [6], выходной случайный сигнал можно представить в виде

$$y(t) = T^T(t) \cdot \frac{2}{n} A^T W X_t. \qquad (15)$$

Обозначения в (15) совпадают с обозначениями (13). Аналогично, найдем

$$y(\tau)=T^T(\tau)\ \frac{2}{n}\ A^T W X_\tau \tag{16}$$

или, что равносильно,

$$y(\tau)=\frac{2}{n} X_\tau^T W^T \cdot A T(\tau). \tag{17}$$

Образуя произведение выражений (15), (17) и усредняя его по множеству реализаций, получим корреляционную функцию выходного случайного процесса

$$K_{yy}(t,\tau)=\frac{4}{n^2}\ T^T(t)\ A^T W \overline{X_t X_\tau^T} W^T A T(\tau). \tag{18}$$

Усредненное произведение вектора-столбца $X_t$ на вектор-строку $X_\tau^T$ есть, очевидно, матрица корреляционных моментов, совпадающая с (7). Итак, окончательно,

$$K_{yy}(t,\tau)=\frac{4}{n^2} T^T(t)\, A^T W K_{xx}(t_i,\ \tau_i)\ W^T A T(\tau). \tag{19}$$

Сравнивая (19) с (13), убеждаемся в их идентичности.

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. М. Осипов, А. Н. Барковский. Один метод анализа нестационарных систем первого порядка. Тр. конференции электриков Кузбасса. Новокузнецк, 1970.
2. В. М. Осипов, А. Н. Барковский. Один метод анализа нестационарных динамических систем. Труды конференции факультета автоматических систем ТПИ. Томск, 1970.
3. В. М. Осипов, А. Н. Барковский. Структурный анализ нестационарных динамических систем. Труды конференции факультета автоматических систем ТПИ. Томск, 1970.
4. В. С. Пугачев. Теория случайных функций, Физматгиз, М., 1962.
5. В. М. Осипов. Экспоненциальные полиномы и разложение некоторых типовых сигналов. Известия Томского политехнического института, т. 180. Томск, 1969.
6. В. М. Осипов. Приближение функций времени методом интерполирования. Изв. ТПИ, т. 191. Томск, 1969.