

КРИТИЧЕСКИЕ ДЛИНЫ ВОЛН В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

С. А. НОВИКОВ

(Представлена семинаром сектора СВЧ и ТУ НИИ ЯФ)

Резонаторы различных типов и волноводы прямоугольного и круглого сечений нашли самое широкое применение в технике СВЧ. Основным параметром, определяющим их дисперсионные характеристики, является критическая длина волны λ_{\perp} (или критическая частота $f_{кр}$), которая в каждом конкретном случае определяет выбор геометрических размеров или частоту питающего генератора.

Значительный интерес представляет рассмотрение критических длин волн в эллиптических волноводах. Объясняется это тем, что любая деформация круглого волновода в процессе изготовления или эксплуатации делает его эллиптическим. Это приводит к снятию вырождения несимметричных типов колебаний (четные и нечетные волны [1]), т. е. каждый несимметричный тип колебаний расщепляется на две составляющие с неравными фазовыми скоростями.

В работе рассмотрено влияние эллиптичности на критические длины волн E - и H - типов, произведены измерения собственных частот резонаторов, представляющих собой отрезки эллиптических волноводов с различными значениями эксцентриситета.

Пусть поле изменяется во времени по закону $e^{-i(\omega t - k_z z)}$. Тогда в эллиптической системе уравнение для Π_z принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \eta^2} + \frac{V\bar{S}}{2}(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \Pi_z = 0, \quad (1)$$

где

$$V\bar{S} = k_{\perp} h,$$

h — полуфокусное расстояние эллипса,

ξ, η — эллиптические координаты.

Используя метод разделения переменных, уравнение (1) можно преобразовать в следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + \left(a - \frac{V\bar{S}}{2} \cos 2\eta \right) \Phi = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - \left(a - \frac{V\bar{S}}{2} \operatorname{ch} 2\xi \right) \psi = 0, \quad (3)$$

где a — произвольная постоянная.

Решением этих уравнений являются функции Матье, описывающие распределение поля в азимутальном и радиальном направлениях. Подходящим решением будет

$$\Pi_z = \sum_{m=0}^{\infty} C_m Ce_m(\xi, \sqrt{S}) ce_m(\eta, \sqrt{S}) + \sum_{m=0}^{\infty} S_m Se_m(\xi, \sqrt{S}) se_m(\eta, \sqrt{S}), \quad (4)$$

где C_m, S_m — произвольные постоянные, определяемые обычным путем; $ce_m(\eta, \sqrt{S}), se_m(\eta, \sqrt{S})$ — косинус и синус эллиптического цилиндра соответственно, которые при переходе эллипса в окружность превращаются в обычные тригонометрические $\cos m\eta, \sin m\eta$; ce_m — является четной функцией, se_m — нечетной.

$Ce_m(\xi, \sqrt{S}), Se_m(\xi, \sqrt{S})$ — радиальные функции, которые при $h \rightarrow 0$ переходят в функции Бесселя $I_m(k_{\perp} r)$. О четности и нечетности этих функций ничего сказать нельзя, но так как эти функции получаются при замене η в $ce_m(\eta, \sqrt{S})$ и $se_m(\eta, \sqrt{S})$ на $i\xi$, то в целом Π_{zmc} и Π_{zms} можно охарактеризовать как четные и нечетные решения.

Решение обыкновенного и модифицированного уравнения Матье можно искать в виде рядов функций Бесселя [2]

$$\begin{aligned} \Pi_{xmc} = C_m \left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r De_{2r+p} I_{2r+p}(V\sqrt{S} \cdot \text{ch } \xi) \right] \cdot \\ \cdot \left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r De_{2r+p} I_{2r+p}(V\sqrt{S} \cdot \cos \eta) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{zms} = S_m \left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+p) Do_{2r+p} I_{2r+p}(V\sqrt{S} \text{ ch } \xi) \right] \cdot \\ \left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+p) Do_{2r+p} I_{2r+p}(V\sqrt{S} \cos \eta) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где De и Do — табулированные коэффициенты разложения. При четном m необходимо брать $p=0$, а при нечетном $p=1$.

Определив векторы Π_{zm}^H и Π_{zm}^E с помощью соотношений, которые связывают их с компонентами поля, можно записать выражения для последних [1]. Задавая граничные условия для тангенциальных компонент поля, можно определить фазовые скорости и критические волны каждой из волн E - или H -типа.

Для E -волн граничное условие, как обычно, сводится к $E_z = 0$ на внутренней поверхности волновода $\xi = \xi_0$.

$$Ce_m(\xi_0, \sqrt{S}) = 0, \quad Se_m(\xi_0, \sqrt{S}) = 0. \quad (7)$$

Пусть S_{mn} и \bar{S}_{mn} соответственно n -ые корни этих уравнений. При соответствующей подстановке S_{mn} и \bar{S}_{mn} в решение уравнения (1) получим различные моды E -волны, которые будем обозначать с индексами E_{mn} . Здесь m — число вариаций поля по угловой координате η .

Для H -волн граничные условия имеют следующий вид:

$$Ce'_m(\xi_0, \sqrt{S}) = 0, \quad Se'_m(\xi_0, \sqrt{S}) = 0. \quad (8)$$

Типы колебаний H_{mn} -волн определяются аналогично.

Если в круглом волноводе λ_{\perp} определяется величиной радиуса (или же периметра $2\pi R$), то для эллиптического волновода следует учитывать и форму эллипса. Эллиптичность будем характеризовать эксцентриситетом $e = \frac{h}{a}$, где a — большой радиус эллипса. Для волноводов такого вида критическая длина волны является функцией переменных

$$\lambda_{\perp} = f(a, e).$$

Вычисление осложняется тем, что коэффициенты разложения C_m, S_m зависят от параметра \sqrt{S} .

$$\text{Если } \sqrt{S} = k_{\perp} h, \quad \text{то } \lambda_{\perp}(m, n) = \frac{2\pi h}{\sqrt{S_{mn}}}.$$

Поскольку нас интересует влияние эксцентриситета на критическую длину волны, то и значение функции удобно выражать в безразмерных величинах.

$$\frac{\lambda_{\perp}}{a} = \frac{2\pi e}{\sqrt{S}}. \quad (9)$$

Наибольший интерес в области СВЧ представляют самые низкочастотные типы колебаний $H_{0I}, E_{0I}, E_{II}^{eo}, H_{II}^{eo}$, где индексом o обозначены нечетные типы колебаний, e — четные типы колебаний.

Рассмотрим E_{0I} -волну. Для определения критической длины этой волны следует решить уравнение

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r De_{2r} I_{2r}(\sqrt{S_1} \cdot \text{ch } \xi_0) = 0.$$

Ввиду быстрой сходимости рядов учет только четырех членов даст достаточную точность. Коэффициенты $De_{2r}(S_1)$ находим интерполированием табличных значений по трем точкам.

Аналогично можно определить критические длины волн других типов колебаний. Графики зависимости вида (9) представлены на рис. 1.

С целью проверки расчетных данных проводилось определение резонансных частот трех эллиптических резонаторов с эксцентриситетами $e_1 = 0,616, e_2 = 0,845, e_3 = 0,903$.

Длину волны в волноводе измеряли для всего набора резонансных частот в рабочем диапазоне генератора. Критическую длину волны определяли из соотношения [3]

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\lambda_{\perp}^2} + \frac{p}{2L^2}}}, \quad (10)$$

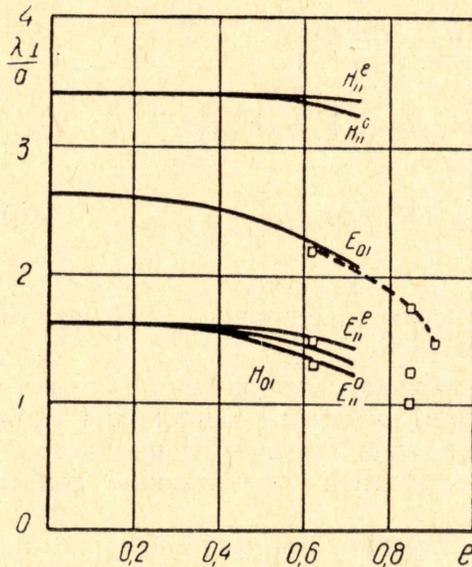


Рис. 1. Зависимость λ_{\perp} от эксцентриситета: ——— расчетная кривая; - - - □ - - - эксперимент для E_{0I}
□ □ эксперимент для E_{II}^e, E_{II}^o .

которое применимо ко всем волноводным системам и типам колебаний, p — число полуволн, укладываемых на длине резонатора L . Определенные таким образом значения $\frac{\lambda_{\perp}}{a}$ нанесены на график рис. 1.

Вычисления показали, что с увеличением эксцентриситета $\frac{\lambda_{\perp}}{a}$ для всех волн уменьшается. Как следует из рис. 1, значения параметра $\frac{\lambda_{\perp}}{a}$ нечетных волн меньше значений $\frac{\lambda_{\perp}}{a}$ соответствующих четных волн.

Экспериментально определенные величины λ_{\perp} показали правильность расчета, ошибка не превышала 2,4%. Очевидно, что учет большего числа членов в разложении функций Матье и интерполирование с большим числом точек повысит точность совпадения экспериментальных и расчетных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Мак-Лахлан. Теория и приложение функций Матье. ИЛ, М., 1953.
 2. Таблицы для вычисления функций Матье. Вычислительный центр АН СССР. М., 1967.
 3. И. В. Лебедев. Техника и приборы СВЧ. Т. 1. «Высшая школа», 1970.
-