ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 235 1973

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКИХ РАБОТ ПРИ МОМЕНТАХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПОЛОЖЕНИЯ И СКОРОСТИ ЗВЕНА ПРИВЕДЕНИЯ

Ю. Я. КОВЫЛИН

Указанная в заглавии статьи задача возникает в связи с тем, что после ориентировочного предварительного определения момента инерции маховика (с помощью какого-либо приближенного метода *)) необходимо рассчитать ход кривой $\omega(\varphi)$ и установить насколько отличается полученное значение коэффициента неравномерности движения звена приведения от заданного. Если различие велико, то принятое приближенное значение момента инерции маховика следует увеличить или уменьшить [1]. После этого расчет по определению закона движения повторяется по крайней мере еще один раз, чтобы убедиться в достаточности скорректированного значения момента инерции маховика для обеспечения движения звена приведения с заданным коэффициентом неравномерности. Вместе с тем извлекается вся информация о ходе кривой $\omega(\varphi)$, необходимая для проведения уточненных расчетов деталей механизма на прочность, долговечность и т. д.

Зависимость $\omega(\varphi)$ в установившемся движении принципиально может быть найдена при помощи известных общих методов [1], [2]. Однако применение их на практике для решения этой задачи связано с рядом неудобств. Во-первых, начальные условия при расчете установившегося движения выбираются весьма ориентировочно. В результате этого для получения решения, отвечающего установившемуся режиму, приходится исследовать движение звена приведения в пределах угла поворота, большего, чем для одного цикла [2]. Во-вторых, после каждого изменения величины момента инерции маховика приходится повторять заново практически весь объем вычислений. В итоге общий объем работы, особенно при переменном приведенном моменте инерции механизма, получается довольно большим.

Излагаемый ниже метод *динамической работы* дает весьма простое и компактное решение всего комплекса задач по динамике установившегося движения механизмов, если заданные силы зависят от положения и скорости звена приведения.

Пусть приведенный к звену приведения момент сил задан функцией $M = M^{\mathrm{I}}(\varphi) + M^{\mathrm{II}}(\omega)$, а приведенный к тому же звену момент инерции звеньев (без маховика) — функцией $I_{зв} = I_{зв}(\varphi)$. Здесь φ и ω — текущие значения угла, определяющего положение звена приведения, и угловой скорости его вращения.

*) Точного метода определения момента инерции маховика при силах, зависящих от перемещений и скоростей, нет.

Пусть, далее, $[\delta]$ — заданное допустимое значение коэффициента неравномерности движения звена приведения. Предположим, что, ориентируясь на это число, с помощью какого-либо метода удалось найти приближенную величину момента инерции маховика $I_м$, устанавливаемого на звене приведения. Теперь требуется рассчитать ход кривой $\omega(\varphi)$ и определить фактическое (расчетное) значение коэффициента δ неравномерности его движения.

Искомую угловую скорость представим как

$$\omega = \omega_{ср} + \Delta\omega, \tag{1}$$

где $\Delta\omega$ — уклонение мгновенной угловой скорости ω вращения звена приведения от ее среднего планиметрического (по углу φ) значения $\omega_{ср}$.

Величина $\omega_{ср}$ должна удовлетворять известному условию периодичности

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Phi} M(\varphi, \omega_{ср} + \Delta\omega)\, d\varphi = 0. \tag{2}$$

Здесь Φ — угол поворота звена приведения, отвечающий одному периоду установившегося движения.

Подставив (1) в (2), найдем

$$M^{\mathrm{I}}_{ср} + \frac{1}{\Phi}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Phi} M^{\mathrm{I}}(\omega_{ср} + \Delta\omega)\, d\varphi = 0, \tag{3}$$

где $M^{\mathrm{I}}_{ср}$ — среднее за период Φ значение момента $M^{\mathrm{I}}(\varphi)$, равное

$$M^{\mathrm{I}}_{ср} = \frac{1}{\Phi}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Phi} M^{\mathrm{I}}(\varphi)\, d\varphi. \tag{4}$$

При достаточно часто встречающемся на практике случае [1], когда характеристика $M^{\mathrm{II}}(\omega)$ выражается линейной функцией скорости ω, уравнение (3) может быть проинтегрировано до конца. Тем самым определяется точное значение средней планиметрической скорости.

При нелинейном характере функции $M^{\mathrm{II}}(\omega)$ величина $\omega_{ср}$ может быть найдена только приближенно. Нетрудно показать, что если н а р а б о ч е м у ч а с т к е кривой $M^{\mathrm{II}}(\omega)$, заключенном между ординатами $\omega = \omega_{min}$ и $\omega = \omega_{max}$, производная $\dfrac{dM^{\mathrm{II}}}{d\omega}$ не меняет знака (а это характерно для всех современных машин), то средняя скорость установившегося движения в первом приближении может быть определена как

$$\omega_{ср} \approx \omega_э\left[1 + 0{,}35\,[\delta]\,\frac{M^{\mathrm{II}}(\omega') + M^{\mathrm{II}}(\omega'') + 2M^{\mathrm{I}}_{ср}}{M^{\mathrm{II}}\quad(\omega') - M^{\mathrm{II}}(\omega'')}\right]. \tag{5}$$

Здесь $\omega_э$ — так называемая средняя энергетическая угловая скорость, определяемая уравнением

$$M^{\mathrm{I}}_{ср} + M^{\mathrm{II}}(\omega_э) = 0;$$

$$\omega' = \omega_э(1 - 0{,}35\,[\delta]);$$

$$\omega'' = \omega_э(1 + 0{,}35\,[\delta]).$$

Для определения зависимости $\Delta\omega(\varphi)$ разделим угол Φ на z одинаковых небольших участков $\Delta\varphi$ и запишем уравнение кинетической энергии

$$\frac{I_\kappa \omega_\kappa^2}{2} - \frac{I_0 \omega_0^2}{2} = A_\kappa \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, z). \tag{6}$$

Здесь ω_0 и ω_κ — значения угловой скорости звена приведения в исходном (нулевом) и κ-м положениях;

I_0 и I_κ — величины приведенного момента инерции механизма (с учетом маховика) в тех же положениях;

A_κ — работа приведенного момента сил M на перемещении звена приведения, равном $\varphi_\kappa - \varphi_0$.

Так как в режиме установившегося движения даже наибольшие уклонения скорости $|\Delta\omega_{\max}|$ значительно меньше, чем $\omega_{ср}$, то с достаточной точностью имеем

$$\omega^2 \approx \omega_{ср}^2 + 2\omega_{ср}\Delta\omega. \tag{7}$$

На том же основании криволинейный рабочий участок заданной зависимости $M^{II}(\omega)$ можно приближенно заменить прямой, проведенной через точку с координатами $\omega = \omega_{ср}$ и $M = -M_{ср}^{I}$. Уравнение этой прямой

$$M_*^{II} = -M_{ср}^{I} + C\Delta\omega,$$

где C — угловой коэффициент, который может быть определен как

$$C = \left(\frac{dM^{II}(\omega)}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_{ср}}, \tag{8}$$

или

$$C \approx \frac{M^{II}(\omega'') - M^{II}(\omega')}{0{,}7\,[\delta]\,\omega_{ср}}. \tag{8'}$$

Здесь

$$\omega' = \omega_{ср}(1 - 0{,}35\,[\delta]); \quad \omega'' = \omega_{ср}(1 + 0{,}35\,[\delta]).$$

Тогда работа A_κ, совершаемая приведенным моментом сил, будет равна

$$A_\kappa = \int_{\varphi_0}^{\varphi_\kappa} M^{I}(\varphi)\,d\varphi - \kappa M_{ср}^{I}\Delta\varphi + C\int_{\varphi_0}^{\varphi_\kappa} \Delta\omega\,d\varphi.$$

Применив для вычисления последнего интеграла правило трапеций, найдем:

$$A_\kappa \approx \int_{\varphi_0}^{\varphi_\kappa} M^{I}(\varphi)\,d\varphi - \kappa M_{ср}^{I}\Delta\varphi + C\Delta\varphi\left(\sum_{i=0}^{\kappa-1}\Delta\omega_i - \frac{\Delta\omega_0}{2} + \frac{\Delta\omega_\kappa}{2}\right). \tag{9}$$

$$(\kappa = 1, 2, \ldots, z).$$

Наконец, внеся (7) и (9) в (6), после простых преобразований получим окончательно

$$\Delta\omega_\kappa \approx \frac{L_\kappa - L^{**} + C\Delta\varphi\sum\limits_{i=0}^{\kappa-1}\Delta\omega_i}{I_\kappa\,\omega_{ср} - \dfrac{C\Delta\varphi}{2}}, \tag{10}$$

где для сокращения записи введены следующие обозначения:

$$L_\kappa = \int_{\varphi_0}^{\varphi_\kappa} M^{I}\,d\varphi - \kappa M_{ср}^{I}\Delta\varphi - \frac{I_{зз.\,\kappa}\,\omega_{ср}^2}{2}; \tag{11}$$

$$L^{**} = -\frac{I_{зв.\,о}\,\omega_{ср}^2}{2} - \Delta\omega_0\left(I_0\,\omega_{ср} - \frac{C\Delta\varphi}{2}\right). \qquad (12)$$

Функция L (ее удобно называть динамической работой) зависит только от φ. И поэтому для всех $\varphi_к$ (от φ_0 до φ_z) ее значения легко могут быть вычислены непосредственно по исходным данным с учетом найденной раньше скорости $\omega_{ср}$.

Через L^{**} обозначена некоторая постоянная величина (12), зависящая от неизвестного пока уклонения $\Delta\omega_0$, которым следует задаться. В первом приближении величину $\Delta\omega_0$ можно определить как

$$\Delta\omega_0 \approx -\frac{0{,}5 I_{зв.\,о}\,\omega_{ср}^2 + L_{ср}}{I_{ср}\,\omega_{ср}}, \qquad (13)$$

где

$$L_{ср} = \frac{1}{z}\sum_{к=1}^{z} L_к;$$

$$I_{ср} = I_м + I_{зв.\,ср}; \quad I_{зв.\,ср} = 0{,}5\,(I_{зв.\,min} + I_{зв.\,max}).$$

Формула (13) может быть получена из (10), если в последней положить $C = 0$ и $I_к = I_{ср}$.

Так как вычисленное таким образом значение $\Delta\omega_0$ не равно точно искомому уклонению, то это неизбежно приведет к тому, что величина $\Delta\omega_z$ уклонения скорости в конце рассматриваемого периода установившегося движения не будет точно равна принятому значению $\Delta\omega_0$. Этому в некоторой степени способствует также накопление ошибки суммы, стоящей в числителе (10)*).

Если невязка $\Delta\omega_z - \Delta\omega_0$ велика, то это свидетельствует о значительном несоответствии приближенного значения $\Delta\omega_0$. В таком случае следует повторить расчет при помощи тех же формул (10) ÷ (12), приняв теперь $\Delta\omega_0$ равным $\Delta\omega_z$. При необходимости вычисления можно продолжать до тех пор, пока разность $\Delta\omega_z - \Delta\omega_0$ не уменьшится до допустимого значения. Эти уточняющие расчеты требуют минимальной затраты труда, так как найденные в первом приближении значения динамической работы L и знаменателя в формуле (10) остаются теми же и в следующих приближениях. Однако, как показывают многочисленные примеры расчета установившегося движения по изложенному методу, надобность в повторении расчетов возникает нечасто.

Оставшуюся невязку можно распределить по линейному закону по всем значениям $\Delta\omega_к$ в пределах периода. Приняв, что величина $\Delta\omega_z$ ближе к истинному уклонению скорости, чем $\Delta\omega_0$, получим уточненно

$$\Delta\omega_к^{ут} = \Delta\omega_к + \frac{\Delta\omega_z - \Delta\omega_0}{z}(z - к), \qquad (14)$$

$$(к = 0, 1, 2, \ldots, z),$$

где через $\Delta\omega_0$, $\Delta\omega_к$ и $\Delta\omega_z$ обозначены уклонения скорости, отвечающие последнему приближению.

Исследовав найденную периодическую зависимость $\Delta\omega(\varphi)$, определим коэффициент неравномерности движения звена приведения по формуле

$$\delta = \frac{\Delta\omega_{max} - \Delta\omega_{min}}{\omega_{ср}}.$$

*) Такие же последствия будут иметь место и при использовании любого другого метода расчета.

Если значение δ мало отличается от заданного $[\delta]$, то найденную приближенную величину $I_м$ можно признать удовлетворяющей поставленным условиям. Если же в результате поверочного расчета разница между δ и $[\delta]$ окажется больше допустимой, то величину момента инерции маховика следует уточнить. При этом можно предположить, что известная [1] гиперболическая зависимость $I_{ср}\,\delta = \text{idem}$ приближенно справедлива и в случае, когда $M = M(\varphi, \omega)$. Тогда получим

$$I_м^{ут} \approx \frac{\delta}{[\delta]}(I_м + I_{зв.\,с.}) - I_{зв.\,ср.}$$

После определения величины $I_м^{ут}$ необходимо еще раз определить ход кривой $\Delta\omega(\varphi)$ при помощи формул (10) ÷ (14), что потребует лишь простейших и нетрудоемких дополнительных расчетов.

В заключение отметим, что надобность в корректировке величины $I_м$ и упомянутом уточнении хода кривой $\Delta\omega(\varphi)$ практически возникает нечасто, если в качестве приближенного значения принимать

$$I_м \approx \frac{L_{max} - L_{min}}{[\delta]\,\omega_{ср}^2} - I_{зв.\,ср},$$

что соответствует известному методу Н. И. Мерцалова и К. Э. Рериха (при $M^{II} = -M_{ср}^{I}$) в интерпретации автора [3].

Таким образом, используя функцию $L(\varphi)$, впервые введенную в практику Н. И. Мерцаловым и К. Э. Рерихом для случая $M = M(\varphi)$ и названную выше динамической работой, можно весьма эффективно решать весь комплекс задач динамики установившегося движения и при $M = M(\varphi, \omega)$.

Изложенный метод легко распространить на общий случай задания зависимости $M(\varphi, \omega)$, когда она не может быть представлена суммой $M^{I}(\varphi) + M^{II}(\omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Артоболевский. Теория механизмов. М., «Наука», 1967.

2. Г. Г. Баранов. Курс теории механизмов и машин. М., «Машиностроение», 1967.

3. Ю. Я. Ковылин. О расчете маховика по методу проф. Н. И. Мерцалова и проф. К. Э. Рериха. Изв. вузов СССР, «Машиностроение», М., № 10, 1960.