

ПРОГРЕВ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛА

(сообщение второе)

Г. П. БОЙКОВ

Представлено профессором ФУКС Г. И.

В сообщении 1 было показано, что дифференциальное уравнение теплопроводности, описывающее распространение тепла в любых телах

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (1')$$

может быть сведено к формуле:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \xi \cdot a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2')$$

Последнее дает возможность определить температурное поле вдоль линии стока тепла в теле при распространении тепла более чем в одном измерении. Так как выражение (1') описывает процесс, протекающий в любых телах, то и дифференциальное уравнение (2') дает температурное поле вдоль линии стока тепла в любом теле, если известна линия стока и значение коэффициента ξ .

Таким образом, задача для граничных условий, соответствующих лучистому теплообмену, может быть сформулирована так:

Имеем дифференциальное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \xi \cdot a \cdot \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Начальное условие:

$$T(x, 0) = T_0 \quad (2)$$

Граничное условие:

$$\frac{\partial T(R_1, \tau)}{\partial x} = \frac{\varepsilon_n \cdot C_0}{\lambda} \cdot \left[\left(\frac{T_c}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_0}{100} \right)^4 \right] = \frac{g_{c1}}{\lambda} \quad (3)$$

Условие симметрии:

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

Можно показать, что выражение:

$$\begin{aligned} \frac{T(x, \tau)}{T_c} = & \frac{T_0}{T_c} + \frac{g_{c1} \cdot R_1}{\lambda \cdot T_c} \cdot \left\{ \xi \cdot \frac{a\tau}{R_1^2} - \left[\frac{\xi}{2(\xi+2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{R_1^2} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot \xi}{\mu_n^2} \cdot \cos \left(\mu_n \frac{x}{R_1} \right) \cdot e^{-\mu_n^2 \xi \frac{a\tau}{R_1^2}} \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Для этого продифференцируем его один раз по времени τ и дважды по координате x :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{g_{c1} \cdot R_1}{\lambda} \cdot \left\{ \xi \frac{a}{R_1^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\xi}{\mu_n^2} \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{R_1}\right) \times \right. \\ \left. \times e^{-\mu_n^2 \xi \frac{a\tau}{R_1^2}} \cdot \mu_n^2 \xi \cdot \frac{a}{R_1^2} \right\} \quad (c)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{g_{c1} \cdot R_1}{\lambda} \left\{ \frac{1}{R_1^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\xi}{\mu_n^2} \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{R_1}\right) \times \right. \\ \left. \times e^{-\mu_n^2 \xi \cdot \frac{a\tau}{R_1^2}} \cdot \frac{\mu_n^2}{R_1^2} \right\} \quad (d)$$

Подстановка (c) и (d) в уравнение (1) приводит к тождеству.

Для проверки соответствия выражения (5) условиям на границе (3) и условиям симметрии (4) найдем первую производную по x :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{g_{c1} \cdot R_1}{\lambda} \cdot \left\{ \frac{x}{R_1^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\xi}{\mu_n^2} \cdot \sin\left(\mu_n \frac{x}{R_1}\right) \cdot e^{-\mu_n^2 \xi \cdot \frac{a\tau_1}{R_1^2}} \cdot \frac{\mu_n}{R} \right\}.$$

Полагая $x = R_1$, находим:

$$\frac{\partial T(R_1\tau)}{\partial x} = \frac{g_{c1}}{\lambda}, \text{ так как } \sin \mu_n = \sin n\pi = 0$$

Полагая далее $x=0$, убеждаемся, что

$$\frac{\partial T(0_1\tau)}{\partial x} = 0;$$

Таким образом, выражение (5) строго удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности (1), граничным условиям (3) и условиям симметрии (4). Но так как дифференциальное уравнение (1) относится к телам любой формы и размеров, то и написанное соотношение (5) представляет температурное поле вдоль линии стока тепла в различных телах, т. е. претендует на определенную универсальность. Универсальность формулы (5) можно также подтвердить и следующими рассуждениями:

Известно, что начиная с некоторого значения критерия Фурье (приблизительно 0,3 — для неограниченной пластины; 0,25 — для бесконечного цилиндра; 0,2 — для шара) рядом от 1 до ∞ в расчетных формулах можно пренебрегать, т. е. приравнивать его нулю. Тогда расчетные формулы примут более простой вид:

а) Для неограниченной пластины:

$$\Theta = K_i \left\{ F_0 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{R^2} \right) \right\} \quad (a)$$

б) Для бесконечного цилиндра:

$$\Theta = K_i \left\{ 2F_0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{R^2} \right) \right\} \quad (б)$$

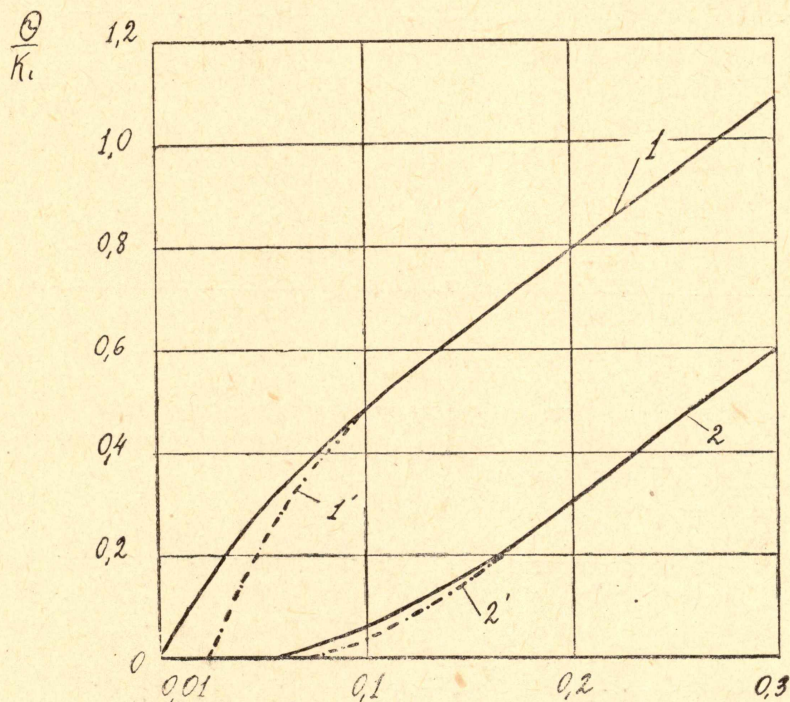
в) Для шара:

$$\Theta = K_i \left\{ 3F_0 - \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{R^2} \right) \right\} \quad (в)$$

Пренебрегая рядом от 1 до ∞ в формуле (5), перепишем ее в виде:

$$\Theta = K_i \left\{ \xi \cdot F_0 - \left[\frac{\xi}{2(\xi+2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{R^2} \right] \right\} \quad (5')$$

Замечаем, что при $\xi = 1$ последнее выражение переходит в формулу (а) для неограниченной пластины. При $\xi = 2$ (5') превращается в расчетную формулу для бесконечного цилиндра (б). При $\xi = 3$ выражение (5') принимает вид расчетной формулы для шара (в). Последнее дает право утверждать, что соотношение (5') является расчетной формулой и для всех промежуточных значений ξ от 1 до 2 и от 2 до 3, т. е. (5') представляет универсальную расчетную формулу для определения температурного поля вдоль линии стока тепла при лучистом прогреве для тел любой формы и размеров. Однако, исследования показали, что зависимость (5) (с учетом ряда от 1 до ∞), удовлетворительно согласуется с начальным условием лишь при малых значениях коэффициента ξ .



Фиг. 1. Прогрев шара при $g = \text{Const}$. Кривые 1 и 2 — изменение безразмерной температуры поверхности и центра шара, построенные по точной формуле (см. [1]). Кривые 1' и 2' построены по формуле (5).

При больших значениях коэффициента ξ (в пределе $\xi = 3$) расхождение с начальным условием получается наибольшее. Но эти же исследования показывают (фиг. 1), что даже наибольшее несоответствие начальным условиям, например, при $\xi = 3$, очень быстро перестает сказываться на ход расчета. Если исходить из случая, когда $\xi = 3$, то можно считать, что предлагаемое расчетное соотношение (5) может быть использовано с достаточной степенью точности при значении критериев Фурье, больших 0,08. Рекомендуемые формулы для ξ приведены в таблице 1.

Таблица 1

	Прогреваемое тело	Формула для определения коэффициента ξ
1	Параллелепипед; куб; брус прямо-угольного и квадратного сечения; неограниченная пластина	$\xi = 1 + \frac{R_1^2}{R_2^2 + 0,5 R_1^2} + \frac{R_1^2}{R_3^2 + 0,5 R_1^2}$ Измерения $R_1 \leq R_2 \leq R_3$ $2R_1 \cdot 2R_2 \cdot 2R_3$
2	Цилиндр конечных размеров; бес-конечный цилиндр	$\xi = 2 + \frac{R_1^2}{R_2^2 + 0,5 R_1^2}$ Измерения $R_1 \leq R_2$ $d = 2R_1$ $L = 2R_2$
3	Диск; неограниченная пластина	$\xi = 1 + 2,5 \frac{R_1^2}{R_2^2 + 0,5 R_1^2}$ Измерения $R_1 \leq R_2$ $L = 2R_1$ $d = 2R_2$
4	Шар	$\xi = 3$

Формула (5) для m -го момента времени при нагреве тел лучистым теплом, когда теплофизические характеристики меняются в функции от температуры, имеет вид: (см. [2]).

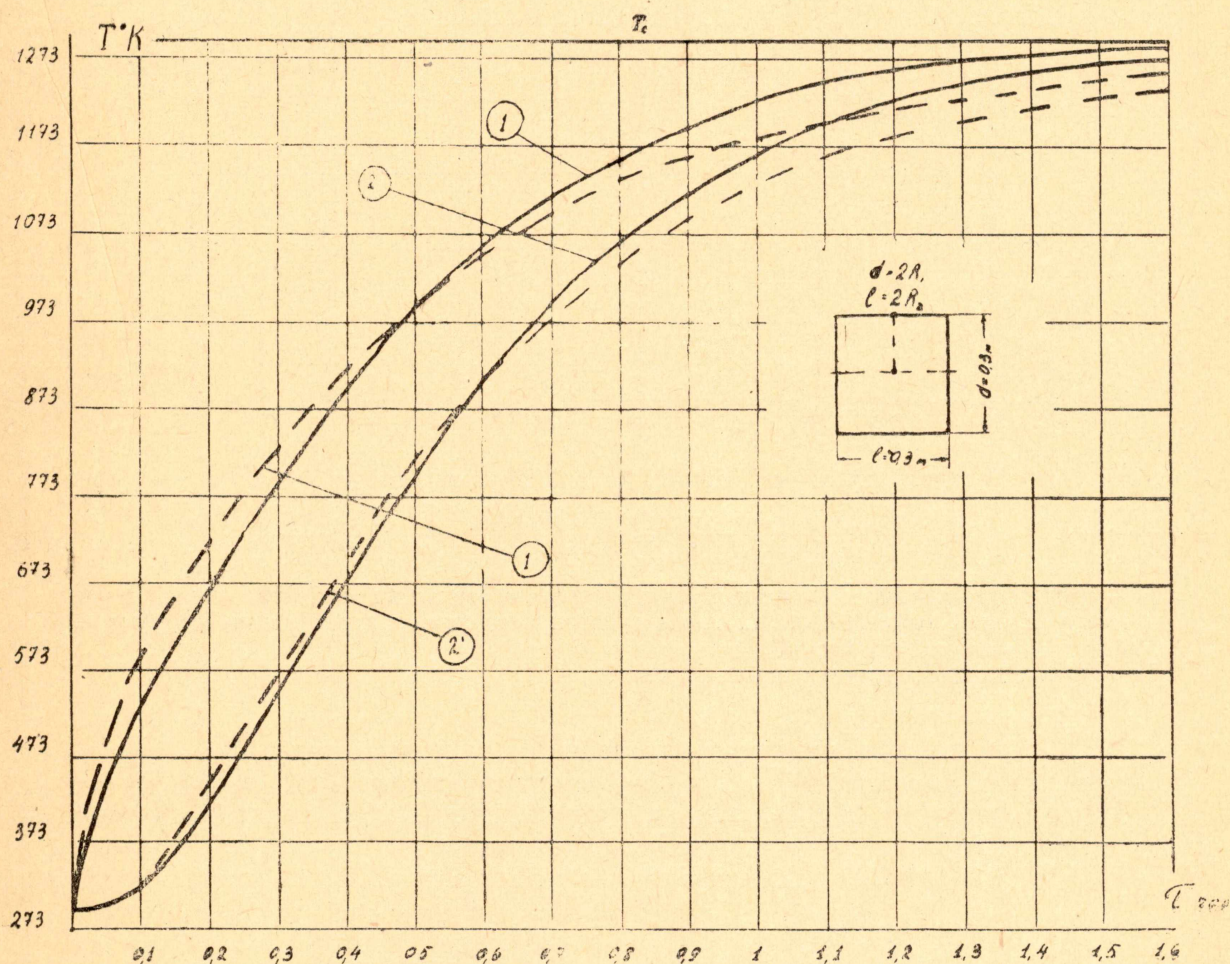
$$\begin{aligned}
 \frac{T_m(x)}{T_c} = & \frac{T_o}{T_c} + \frac{g_c \cdot R_1}{\lambda_1 \cdot T_c} \cdot \left\{ \xi \cdot \frac{a_1 \tau_1}{R_1^2} \cdot \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{ci}}{g_c} \cdot \frac{c_i}{c_i} - \frac{g_{cm}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_m} \cdot \right. \\
 & \cdot \left[\frac{\xi}{2(\xi+2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{R_1^2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot \xi}{\mu_n^2} \cdot \cos \left(\mu_n \frac{x}{R_1} \right) \cdot \left[\frac{g_{c1}}{g_c} \cdot \right. \\
 & \cdot e^{-\mu_n^2 \xi} \cdot \sum_{i=1}^{i=m} \frac{a_i \tau_1}{R_1^2} - \sum_{i=1}^{i=m-1} \left(\frac{g_{ci}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_i} - \frac{g_c(i+1) \lambda_1}{g_c \cdot \lambda(i+1)} \right) \cdot \\
 & \left. \left. \cdot e^{-\mu_n^2 \xi} \sum_{k=1}^{k=m-i} \frac{a_{(i+k)} \tau_1}{R_1^2} \right] \right\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Среднюю температуру тела и расчетный интервал времени следует определять, пользуясь соотношениями:

$$\frac{T_m^{cp}}{T_c} = \frac{T_o}{T_c} + \frac{g_c \cdot R_1}{\lambda_1 \cdot T_c} \cdot \xi \cdot \frac{a_1 \tau_1}{R_1^2} \cdot \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{ci}}{g_c} \cdot \frac{c_1}{c_i}; \quad (7)$$

$$\tau_1 = \frac{0,022 \cdot \lambda_1 \cdot T_c \cdot R_1}{g_c \cdot \xi \cdot a_1}; \quad (8)$$

$$\varphi_m < 1 - \frac{a_2}{a_1} \cdot \left\{ 1 - \frac{(\xi + 2) \left(g_{c1} - g_{c2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)}{g_{c1} \cdot \left[\xi + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 \xi} \cdot \frac{a_1 \tau_1}{R_1^2} \right]} \right\} \quad (9)$$



Фиг. 2. Прогрев стального цилиндра $d=0,3$ м: $l=0,3$ м при $\lambda=30$ ккал/м час. град. $a=0,0225$ м²/час; $C_{изл}=3,65$ ккал/м²час °K⁴.

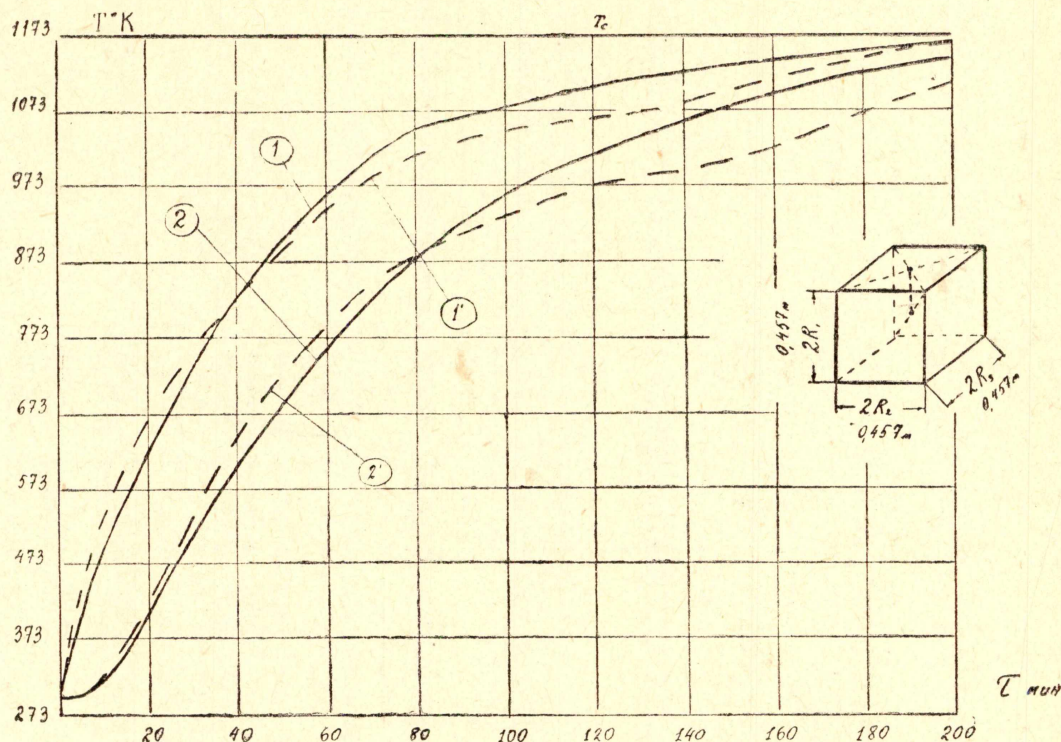
— Расчетные данные изменения температуры поверхности и центра цилиндра без учета изменения теплофизических характеристик вещества, полученные по формуле (6).

--- тоже по методу перемножения температурных критериев при $\alpha_{изл}=200$ ккал/м²час град.

При $\xi=1, 2, 3$ выражения (7), (8), (9) переходят в соответствующие формулы для неограниченной пластины, бесконечного цилиндра и шара [2].

Если теплофизические характеристики вещества неизменны, то при

$c_1 = c_2 = \dots c_i$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_i$; $a_1 = a_2 = \dots a_i$ выражения (6) - (9) перейдут в расчетные формулы для случая, когда теплофизические характеристики не зависят от температуры [2].



Фиг. 3. Прогрев куба из стали (ст. 0,34) со стороной 0,457 м при

$$\lambda = f(t) \frac{\text{ккал}}{\text{м час град.}}; C = f(t) \frac{\text{ккал}}{\text{кг град.}}; a = f(t) \frac{\text{м}^2}{\text{час}}$$

— расчетные данные изменения температуры поверхности и центра куба с учетом изменения теплофизических характеристик вещества, полученные по формуле (6) при $C_{\text{изл}} = 3,6 \text{ ккал/м}^2\text{час } ^\circ\text{K}^4$,
 --- то же по данным опыта [3].

В большинстве практических расчетов значение ряда от 1 до ∞ очень мало по сравнению с двумя первыми слагаемыми в фигурных скобках формулы (6). Поэтому им можно пренебречь. Тогда расчетное соотношение сильно упрощается и принимает вид:

$$\frac{T_m(x)}{T_c} = \frac{T_o}{T_c} + \frac{g_c R_1}{\lambda_1 T_c} \cdot \left\{ \xi \cdot \frac{a_1 \tau_1}{R_1^2} \cdot \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{ci}}{g_c} \cdot \frac{c_i}{c_i} - \frac{g_{cm}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_m} \cdot \left[\frac{\xi}{2(\xi+2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{R_1^2} \right] \right\} \quad (6')$$

При указанном условии формула (6') является математически точным расчетным соотношением для тел любой формы и размеров. В частности при $\xi = 1, 2, 3$ она переходит в формулы для неограниченной пластины, бесконечного цилиндра, шара (см. [2]).

На фиг. 2 показан прогрев стального цилиндра диаметром $d = 0,3 \text{ м}$ и длиной $l = 0,3 \text{ м}$. Кривая 1 (изменение температуры поверхности) и кривая 2 (центра) построены по формуле (6) при неизменных теплофи-

зических характеристиках вещества. Кривые 1' и 2' построены для тех же условий методом перемножения температурных критериев при

$$\alpha_{изл} = 200 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \text{час град.}}$$

На фиг. 3 показан прогрев стального куба со стороной 0,457 м. Кривая 1 (изменение температуры поверхности) и кривая 2 (центра) построены по формуле (6) с учетом изменения теплофизических характеристик вещества в функции от температуры. Кривые 1' и 2' построены по данным опыта [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Распределение температурного поля вдоль линии стока тепла в телах различной конечной формы может быть представлено одной формулой, не отличающейся по сложности от решения для одномерной задачи.

2. Расчетные соотношения (6) :- (9) могут быть рекомендованы, как приближенные формулы для определения температурного поля вдоль линии стока тепла в телах различной формы при прогреве их под действием лучистого тепла. Предложенные выражения применимы при $F_0 > 0,08$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Лыков — Теория теплопроводности, ГИТТЛ, М., 1952.
 2. Г. П. Бойков — Прогрев тел под действием лучистого тепла, (Изв. ТПИ, том 89, 1957), Томск.
 3. В. Н. Соколов — Расчет нагрева металла методом сеток, ЦНИИМАШ (Нагрев крупных слитков), ГНТИМЛ, М., 1954.
-