ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 243 1972

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВСЕХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА n-й СТЕПЕНИ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ЭВМ «МИНСК-1»

Г. Л. КАЛИНИЧЕНКО, Г. Н. ДРОНОВА
(Представлена отделом вычислительной техники НИИ АЭМ)

Решение уравнений, алгебраических или трансцендентных, представляет собой одну из существенных задач прикладного анализа, потребность в которой возникает в многочисленных и самых разнообразных разделах физики и механики, техники и естествознании в самом широком смысле этого слова.

В вычислительной технике чаще всего возникает необходимость в определении корней многочлена без знания их приближенных значений. Эту задачу можно решить методом скорейшего спуска. Метод скорейшего спуска позволяет определить все корни многочлена n-ой степени с комплексными коэффициентами без задания приближенных значений. Метод скорейшего спуска реализуется на ЭВМ, обеспечивает большую скорость работы и позволяет определить корни с высокой степенью точности, к тому же обладает квадратичной сходимостью.

Задача определения всех корней многочлена эквивалентна задаче определения всех точек абсолютного минимума функции двух переменных $\varphi[u(x,y),\ v(x,y)]$, где за $F=\varphi(u,v)$

$$\sqrt{u^2+v^2} \quad \text{или} \quad |u|+|v|.$$

Последовательные приближения к точкам минимума могут осуществляться по приведенным формулам

$$z_{k+1}=z_k-\mu\frac{P_n(z_k)}{P'_n(z_k)},$$

где μ определяется из неравенства

$$(*)\quad |P_n(z_{k+1})|<|P_n(z_k)|. \qquad (1)$$

Число, для которого это неравенство определяется, называется подходящим параметром $|0|<\mu<1$. Если $P'(z_к)$ мало, то для спуска по поверхности $F(x,y)$ нецелесообразно применять формулу (*), так как подходящий параметр определяется за большое число проб. Если вокруг любой точки $z_к$ описать круг радиуса $r_к$, то на границе этого круга обязательно найдутся точки, в которых выполняется неравенство (1). Эти точки можно брать за следующие приближения к корню. Радиус круга определяется по формуле

$$r_k=\left[\max\left\{\left|\frac{nc_n-j}{c_n}\right|^{\frac{1}{j}}\right\}_{j=1}^{j=n}\right]^{-1}. \qquad (**)$$

Здесь c_j — коэффициенты разложения многочлена $P_n(z)$ по степеням $(z-z_к)$.

Поиск точки по окружности ищется следующим способом. Вычисляем последовательность чисел

$$z^{(0)}l_k = z_k \ldots z_k l^{ilh_0}, \text{ где } h_0 = \frac{\pi}{4}; \ l = 0,1 \ldots 7$$

$$z^{(j)}l_k = z_k + z_k l^{i(2l+1)nj}; \ h_j = \frac{h_j - 1}{2} \qquad (***)$$

$$l = 0,1,\ldots 2^{2+j} - 1; \quad j = 1,2\ldots$$

И за z_{k+1} берется то из них, для которого впервые выполняется неравенство (1).

Таким образом, вычисление осуществляется либо по (*), либо (***). Критерием перехода от одной формулы к другой служит неравенство

$$|P_n(z_k)| \geqslant \mu R_k |P'_n(z_k)|,$$

$$\text{где} \qquad R_k = \sqrt[n]{|P_n(z_k)| \frac{1}{|a_0|}}, \quad \mu = (4 \div 6). \qquad (2)$$

Если это неравенство выполняется, то вычисления производят по формуле (***), если не выполняется, то по (*). Метод скорейшего спуска позволяет определять корни многочлена, исходя из произвольного начального приближения z_0. Однако в целях экономии времени счета за начальное приближение можно взять

$$z_0 = \nu + i \sqrt[n]{|P_n(\nu)| \frac{1}{|a_0|}},$$

где $\nu = -\frac{a_1}{na_0}$. Величина ν есть среднее арифметическое всех корней многочлена.

Описание программы

Программа составлена в интерпретирующей системе и рассчитана на многочлен с комплексными коэффициентами степени не больше 20. Под каждый коэффициент отводится две ячейки — одна под действительную, другая под мнимую части. В программе разработаны стандартные подпрограммы умножения и деления комплексных чисел, а также нахождения производной, многочлена от комплексного числа по схеме Горнера, модуля комплексного числа, к которым приходится часто обращаться.

Память машины разбита таким образом:

1. Стандартные подпрограммы занимают вместе с ИС с 1 по 750-ю ячейки.
2. Данные заносятся с 1572-й ячейки.
3. Рабочие ячейки располагаются с 1500—1515 ячейки. Пуск программы с 767-й ячейки.

Начально приближение находится по формуле (3). В зависимости от выполнения условия (1) и (2) следующие приближения ищутся по формулам (*), (***). После того как приближение удовлетворяет заданной точности, мы выделяем это приближение как корень многочлена. Затем понижаем степень многочлена и вычисляем следующий корень многочлена степени n—1, если корень действительный, и степени n—2, если корень комплексный, и так до тех пор, пока не найдем всех корней многочлена.

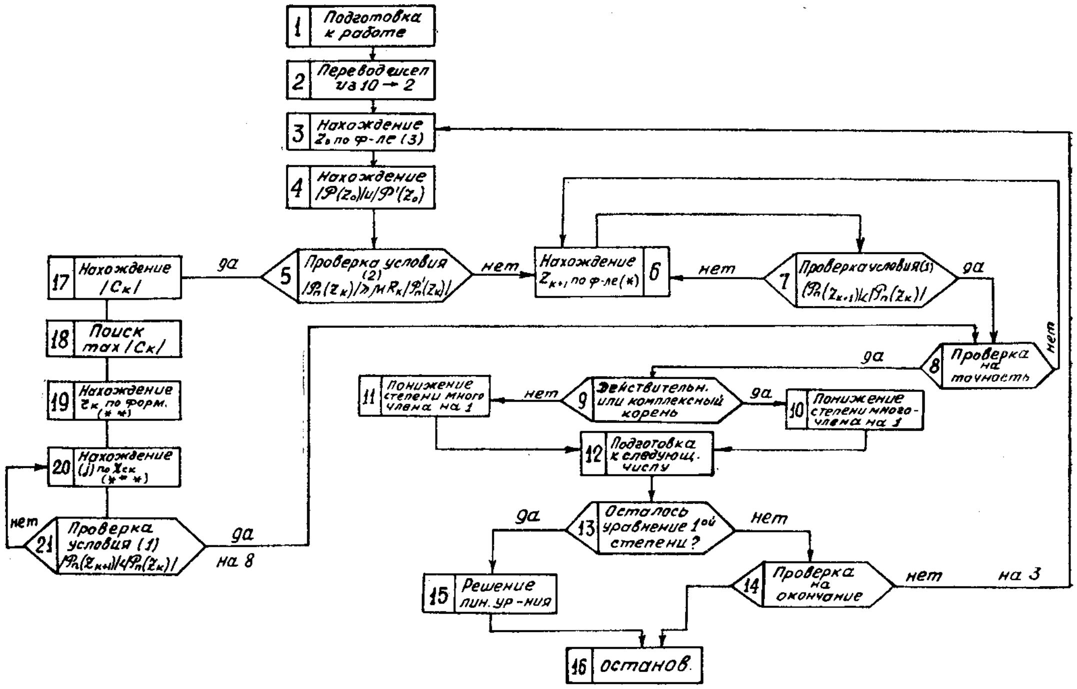

Рис. 1. Блок-схема программы

ЛИТЕРАТУРА

Б. И. Демидович и И. А. Маров. Основы вычислительной математики. ШФМЛ, Москва, 1963.

В. В. Воеводин. Численные методы алгебры. ФМЛ, Москва, 1966.

В. Л. Загускин. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. ФМЛ, Москва, 1960.

В. Д. Дель, Г. Л. Калиниченко, В. А. Мальцев. Автоматизация программирования для ЦВМ «Минск-1» методом интерпретирующих систем. Томск, 1969.