

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Engle R. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kindom Inflation // *Econometrica*. – 1982. – V. 50. – P. 987–1001.
2. Bollerslev T. Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity // *Journal of Econometrics*. – 1986. – V. 31. – P. 307–327.
3. Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.V.K. Multivariate GARCH models: a survey // *Econometrica*. – 2003. – № 4. – P. 459–464.
4. Bollerslev T. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH approach // *Review of Economics and Statistics*. – 1990. – № 72. – P. 498–505.
5. Engle R., Sheppard K. Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH // NBER Working paper series. – 2001. – № W8554.
6. Kotz S., Kozubowski T.J., Podgorski K. An asymmetric multivariate Laplace Distribution // *Mathematical and computer modeling*. – 2003. – № 34. – P. 1003–1021.

УДК 681.5

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПОЛЮСОВ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЗАДАННОМ СЕКТОРЕ

С.В. Замятин, С.А. Гайворонский

Томский политехнический университет
E-mail: zamsv@aicrs.ru

Рассматривается характеристический полином системы, в коэффициенты которого линейно входят интервально-заданные и настраиваемые параметры. Предлагается подход, позволяющий обеспечить расположение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы в заданном секторе и локализацию остальных ее полюсов в заданной области комплексной плоскости. Приводится числовой пример.

1. Введение

Одной из основных задач, решаемых при проектировании систем автоматического управления, является задача обеспечения требуемого качества переходных процессов, которое зависит от расположения полюсов замкнутой системы. Известно, что динамические свойства системы определяются ее двумя-тремя доминирующими полюсами, так как влияние остальных полюсов оказывается незначительным из-за их удаленности от мнимой оси [1].

Для стационарной системы решение задачи размещения доминирующих полюсов в заданных точках комплексной плоскости рассматривается в работах [2, 3]. Отличительной особенностью подхода, предложенного в [3], является возможность не только обеспечивать требуемое положение назначаемых доминирующих полюсов, но и размещать остальные (свободные) полюсы в желаемой области.

Однако большинство реальных систем автоматического управления имеют параметры, которые изменяются в определенных пределах по заранее неизвестным законам или неточно заданы. Если передаточные функции систем содержат полиномы с интервальными коэффициентами, то согласно [4] они классифицируются как линейные интервальные динамические системы (ЛИДС). Коэффициенты характеристических полиномов ЛИДС на основе правил интервальной арифметики могут быть представлены интервалами, что позволяет отнести полиномы к классу интервальных. Решение задачи размещения полюсов систем с интерваль-

ными полиномами рассматривается в ряде работ [5, 6]. Однако предлагаемые в этих работах методы синтеза регуляторов предусматривают, что все компоненты вектора состояния должны быть доступны для измерения.

В этой связи представляет интерес робастное расширение подхода, предложенного в [3] и позволяющего для решения поставленной задачи использовать линейный динамический регулятор по выходу. Поскольку коэффициенты характеристического полинома имеют фиксированные пределы изменения, то полюсы системы оказываются локализованными в некоторых замкнутых областях. Желаемое размещение доминирующих и свободных полюсов предполагает, что области их локализации не должны выходить за допустимые границы при любых значениях интервальных параметров. Следовательно, при размещении полюсов ЛИДС необходимо реализовать принцип доминирования на основе обеспечения региональной робастной устойчивости.

2. Постановка задачи

Пусть объект управления ЛИДС задан передаточной функцией

$$W(p) = \frac{C(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{i=0}^u c_i p^i}{\sum_{i=0}^z d_i p^i}, \quad (1)$$

где c_i и d_i – интервальные коэффициенты, а u , z – соответственно степени полиномов $C(p)$ и $D(p)$. Передаточная функция динамического регулятора имеет вид

$$W_p(p) = \frac{\sum_{i=0}^l k_i p^i}{\sum_{i=l+1}^r k_i p^{i-l-1}}, \quad (2)$$

где $k_i, i=1,2,\dots,r$ – настраиваемые параметры, l – их количество в числителе $W_p(p)$. Тогда характеристическое уравнение ЛИДС может быть представлено в виде

$$R(p) = \sum_{i=0}^n a_i (\bar{k}, \bar{c}, \bar{d}) p^i, \quad (3)$$

где \bar{c} и \bar{d} – векторы значений интервальных коэффициентов полиномов $C(p)$ и $D(p)$, \bar{k} – вектор настраиваемых параметров регулятора, линейно входящих в коэффициенты полинома (3), a_i – интервальные коэффициенты полинома (3), являющиеся функциями $\bar{k}, \bar{c}, \bar{d}$.

Необходимо выбрать такие значения параметров $k_i, i=1,2,\dots,r$, чтобы при возможных вариациях интервальных коэффициентов полинома (3) колебательность доминирующих полюсов ЛИДС не превышала допустимую, а свободные полюсы были локализованы в заданной области.

Так как в выражение (3) входят интервальные коэффициенты, то оно соответствует семейству полиномов. Очевидно, что применение методики [3] к каждому полиному этого семейства невозможно, поэтому желательно найти условия, позволяющие судить о максимальной колебательности ЛИДС по одному полиному. В связи с этим предлагается разделить поставленную задачу на две:

1. Выделить из заданного семейства полиномов одного полинома $R_b(p)$, который будет гарантированно определять максимальную колебательность интервальной системы.
2. Разместить корни найденного полинома желаемым образом (с соблюдением принципа доминирования), в соответствии с методикой [3].

3. Определение пределов коэффициентов полинома с максимальной колебательностью корней

Пусть m полюсов $p_g, g=\overline{1,m}$, лежат левее полюса p_0 . Обозначим через Θ_g угол между вещественной осью и вектором, направленным к полюсу p_0 от полюса p_g .

Утверждение 1. Сумма углов между векторами, направленными от полюсов $p_g, g=\overline{1,m}$ к полюсу p_0 , и действительной осью определяется неравенством

$$0 < \sum_{g=1}^m \Theta_g < \frac{\pi}{2} m. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $m=1$. Очевидно, что в данном случае при перемещении вещественного полюса p_1 левее p_0 , угол $\Theta_1 \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Пусть $m=2, p_{1,2} = -\alpha_1 \pm j\beta_1, p_0 = -\alpha_2 + j\beta_2$.

Тогда, используя тригонометрические соотношения, легко получить

$$\sum_{g=1}^n \Theta_g = \text{arctg} \left(\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_2^2 - \beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \right). \quad (5)$$

При изменении α_1, β_1 имеем

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_2^2 - \beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \right) \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \beta_2 > \beta_1} \left(\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_2^2 - \beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \right) \rightarrow -\infty.$$

Следовательно, при $m=2$ на основании свойств

функции котангенса, $\sum_{g=1}^2 \Theta_g \in [0; \pi]$.

Сумма углов Θ_g при других m может быть представлена суммами углов при $m=1$ и $m=2$. Следовательно, неравенство (4) будет выполняться при любых m .

Для определения полинома $R_b(p)$, корни которого определяют максимальную колебательность всего заданного семейства полиномов, воспользуемся фазовыми соотношениями углов выхода ветвей корневого годографа [7]. Угол выхода из комплексного корня при увеличении интервального коэффициента a_i находится по формуле

$$\Theta_i^q = \pi - \left(\sum_{g=1}^m \Theta_g + \frac{\pi}{2} \right) + i\Theta_0, \quad (6)$$

а при уменьшении a_i

$$\Theta_i^q = - \left(\sum_{g=1}^m \Theta_g + \frac{\pi}{2} \right) + i\Theta_0, \quad (7)$$

где Θ_g и Θ_0 – углы между вещественной осью и векторами, направленными к некоторому корню от g -го полюса и от i -х нулей с координатами $(0; j0)$, соответственно. Величина $\frac{\pi}{2}$ добавлена в связи с учетом корня, комплексно-сопряженного p_0 .

На основании (6) и (7), получим условие для углов выхода корня с максимальной колебательностью: для того, чтобы корень определял максимальную колебательность области его локализации, необходимо, чтобы векторы, задающие углы выхода данного корня по всем $a_i, i=\overline{0,n}$, были направлены внутрь сектора $\Gamma \pm \Theta_0$, т. е. выполнялось условие:

$$\Theta_0 < i\Theta_0 - \left(\sum_{g=1}^m \Theta_g + \frac{\pi}{2} \right) + \Omega < \Theta_0 + \pi, \quad (8)$$

где $\Omega=0, \pi$ в зависимости от того, увеличивается или уменьшается интервальный параметр. Из уравнения (8) получим:

$$\Theta_0(i-1) + \Omega - \frac{\pi}{2} - \pi < \sum_{g=1}^m \Theta_g < \Theta_0(i-1) + \Omega - \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Для формирования искомого набора пределов коэффициентов полинома $R_b(p)$ в (9) подставляется значение угла Θ_0 , и для всех значений i выбираются такие $\Omega=0, \pi$, чтобы неравенства (4) и (9) выполнялись. В результате получим соответствие набо-

ров пределов коэффициентов некоторым интервалам $\sum_{g=1}^m \Theta_g$. Если $\Omega_i=0$, то значение i -го коэффициента в полиноме $R_i(p)$ будет максимальным, если $\Omega_i=\pi$ – минимальным. Заметим, что каждому набору коэффициентов соответствует интервал значений $\sum_{g=1}^m \Theta_g$.

В табл. 1, 2 представлены зависимости наборов коэффициентов полинома (3) и соответствующие им $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ для некоторых Θ_0 .

4. Анализ областей расположения свободных полюсов

Так как выбор пределов коэффициентов полинома (3), определяющих корень с наибольшей колебательностью, зависит от $\sum_{g=1}^m \Theta_g$, то следует определить, каким областям расположения свободных полюсов соответствуют найденные интервалы $\sum_{g=1}^m \Theta_g$.

Рассмотрим выражение:

$$\sum_{g=1}^m \Theta_g = \text{arccctg} \left(\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_2^2 - \beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \right). \quad (10)$$

Пусть $\sum_{g=1}^m \Theta_g = \Psi$, где Ψ некоторый фиксированный угол. На основании (10) построим на плоскости корней границу, соответствующую значению Ψ при заданных доминирующих полюсах $\alpha_2=-2, \beta_2=\pm 2$, рис. 1.

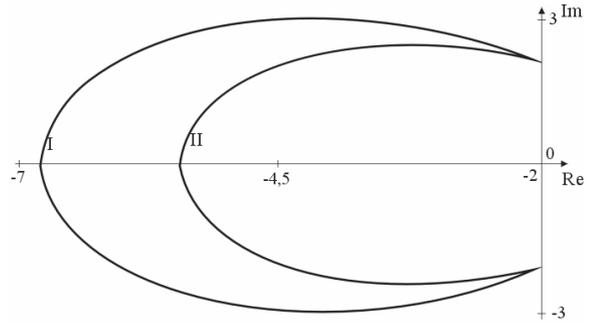


Рис. 1. Геометрическое место расположения полюсов при $n = 4$: I) $\Psi = \frac{\pi}{4}$, II) $\Psi = \frac{\pi}{3}$

Таблица 1. Зависимость набора коэффициентов полинома (3) и соответствующие им $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ для некоторых Θ_0 для полинома 3-й степени ($m=1$)

$\Theta_0 = \frac{1}{2}\pi$		$\Theta_0 = \frac{2}{3}\pi$		$\Theta_0 = \frac{3}{4}\pi$	
$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{2}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{6}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{4}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$
–	–	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$

Таблица 2. Зависимость набора коэффициентов полинома (3) и соответствующие им $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ для некоторых Θ_0 для полинома 4-й степени ($m=2$)

$\Theta_0 = \frac{1}{2}\pi$		$\Theta_0 = \frac{2}{3}\pi$		$\Theta_0 = \frac{3}{4}\pi$	
$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{2}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{6}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{4}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$
$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$
–	–	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$
–	–	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{5\pi}{6}; \pi]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{3\pi}{4}; \pi]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$

В ур. (10) a_1 принимает максимальное значение при $\beta_1=0$ и является монотонно убывающей функцией от $\sum_{g=1}^m \Theta_g$, следовательно, области, располагающиеся левее, будут иметь меньшее значение $\sum_{g=1}^m \Theta_g$. Для того, чтобы обеспечить доминирующее расположение корней, далее будем рассматривать такой набор коэффициентов (3), при котором $\min\left(\sum_{g=1}^m \Theta_g\right) = 0$ (табл. 1, 2). Область, соответствующую данному интервалу значений $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ обозначим S_0 . Уравнение прямой d , параллельной мнимой оси, левее которой всегда располагается S_0 , определяется из выражения:

$$\max\left(\sum_{g=1}^m \Theta_g\right) = \frac{\pi}{2} + m \cdot \arctg\left(\frac{\beta_2}{d - \alpha_2}\right). \quad (11)$$

Если при изменении интервальных параметров области локализации свободных полюсов будут находиться в области S_0 , то наибольшая колебательность области локализации назначаемых доминирующих полюсов будет определяться выбранным набором коэффициентов.

5. Методика размещения полюсов

На основании проведенных исследований разработана следующая методика размещения полюсов линейной интервальной динамической системы в заданном секторе.

1. Задаются желаемые координаты доминирующих полюсов ЛИДС, определяющие ее максимальную колебательность, соответствующую Θ_0 .
2. Из табл. 1, 2 выбирается интервал значений $\sum_{g=1}^m \Theta_g$,

(соответствующий Θ_0 и координатам доминирующих полюсов и степени полинома) и соответствующий набор пределов коэффициентов полинома R_b . Если требуется найти набор пределов коэффициентов при другом Θ_0 или при интервальном полиноме более высокого порядка, то следует воспользоваться выражениями (4) и (9).

3. На основании (11) определяется уравнение прямой d , левее которой гарантированно располагается S_0 .
4. Полином (3) приводится к виду

$$\sum_{i=1}^r k_i A_i(p) + B(p) = 0.$$

5. Согласно методике [3] определяются настраиваемые параметры, обеспечивающие желаемое расположение корней полинома R_b .
6. Проверяется расположение областей локализации доминирующих и свободных полюсов ин-

тервальной системы с найденными настройками. В случае выхода областей за заданные границы следует увеличить число настраиваемых коэффициентов.

6. Пример

Пусть для объекта с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{1}{(p + T_1)(p + T_2)(p + T_3)} \quad (12)$$

необходимо выбрать параметры регулятора

$$W_p(p) = \frac{k_3 p^2 + k_2 p + k_1}{p}. \quad (13)$$

На основании (12) и (13) получим характеристическое уравнение системы

$$p^4 + a_3 p^3 + (b_2 + k_3) p^2 + (b_1 + k_2) p + k_1 = 0,$$

где $a_2 = b_2 + k_3$, $a_1 = b_1 + k_2$, $a_0 = k_1$, $a_3 = [17; 20]$, $b_2 = [192; 200]$, $b_1 = 1024$.

Требуется обеспечить расположение областей локализации двух доминирующих полюсов в секторе $\Theta_0 = \pm \frac{3}{4} \pi$, а свободные полюсы расположить в соответствии с принципом доминирования.

Пусть доминирующие полюса располагаются в точках $\lambda_1 = -1 + j1$ и $\lambda_2 = -1 - j1$. Из табл. 2 выберем пределы коэффициентов полинома, соответствующих области S_0 и сектору $\Theta_0 = \pm \frac{3}{4} \pi : \overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$, $a_4 = 1$, $a_3 = 20$, $a_2 = 200 + k_3$, $a_1 = 1024 + k_2$. Из выражения (11) найдем прямую $d = -3,4$. Для того, чтобы колебательность области локализации доминирующих полюсов определял только один набор коэффициентов, требуется, чтобы область расположения свободных полюсов лежала левее d . С учетом принципа доминирования зададим границу свободных полюсов $X(j\beta) = -7$, $-\infty < \beta < \infty$.

В соответствии с методикой [3], варьируемые параметры регулятора разделены на свободный k_1 и зависимые k_2 и k_3 . После формирования необходимых матриц и векторов проведено D -разбиение по k_1 и построена область, соответствующая желаемому расположению свободных полюсов. При $k_1 = 190$ получены значения зависимых параметров $k_2 = -798$ и $k_3 = -67$. На рис. 2, 3 представлены области локализации полюсов ЛИДС, соответствующие найденным настройкам регулятора.



Рис. 2. Области локализации доминирующего и свободного полюсов

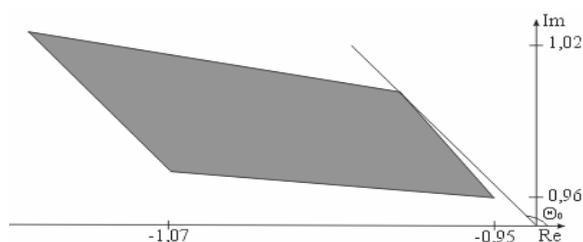


Рис. 3. Область локализации доминирующего полюса

Расположение полученных областей локализации полюсов интервальной системы при найденных значениях варьируемых параметрах регулятора полностью удовлетворяют предъявленным требованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Райцын Т.М. Синтез систем автоматического управления методом направленных графов. – Л.: Энергия, 1970. – 96 с.
2. Скворцов Л.М. Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе одномерных регуляторов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1996. – № 4. – С. 10–13.
3. Вадутов О.С., Гайворонский С.А. Решение задачи размещения полюсов системы методом D -разбиения // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 23–27.
4. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н. Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических си-

Заключение

Предложенный подход дает достаточно простую процедуру размещения областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с гарантированной максимальной колебательностью. Разработанная методика позволяет размещать ее свободные полюса в соответствии с принципом доминирования с учетом выполнения фазовых соотношений метода корневого годографа. Возможность выделения из семейства только одного полинома, гарантирующего желаемую динамику интервальной системы, позволяет применять к таким системам различные методы, разработанные для стационарных систем.

5. стем (состояние проблемы) // Техническая кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 3–23.
5. Хлебалин Н.А. Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления // Аналитические методы синтеза регуляторов. – Саратов: Саратовский политехн. ин-т, 1988. – С. 26–30.
6. Захаров А.В. Шокин Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 299. – № 2. – С. 292–295.
7. Удерман Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. – М.: Наука, 1972. – 448 с.

УДК 553.411.071.242.4+550.4

МИНЕРАЛОГО-ПЕТРОХИМИЧЕСКИЕ И ГЕОХИМИЧЕСКИЕ ЧЕРТЫ ОКОЛОРУДНОГО МЕТАСОМАТИЗМА В ВЕРХНЕ-САКУКАНСКОМ ЗОЛОТОРУДНОМ МЕСТОРОЖДЕНИИ (СЕВЕРНОЕ ЗАБАЙКАЛЬЕ). Ч. 2. Околожилные метасоматические и геохимические ореолы

И.В. Кучеренко

Томский политехнический университет
E-mail: lev@tpu.ru

Приведены результаты изучения минералого-петрохимической зональности околожилных метасоматических ореолов Верхне-Сакуканского месторождения, показаны относительно малообъемные масштабы ореолов в обрамлении слабозолотоносных кварцевых жил и принадлежность их к березитовой метасоматической формации, а месторождения – к золотой субформации золото-уран-полиметаллической березитовой рудной формации. Распределение золота, серебра и некоторых сопровождающих металлов в междужильном пространстве подчиняется структуре околожилных метасоматических ореолов и по этому показателю месторождение демонстрирует приверженность к выявленной ранее закономерности, согласно которой структура и масштабы околожилных геохимических ореолов прямо зависят от интенсивности околожилных гидротермальных изменений вмещающих пород, а контрастность геохимических аномалий, кроме того, – от степени золотоносности кварцевых жил. Полученные результаты обсуждаются в сравнении с ситуацией в других мезотермальных золотых месторождениях.

Введение

В первой части статьи [1] в плане решения важнейшей в теории рудообразования и в практике прогнозирования и поисков месторождений проблемы источников рудного вещества обращено внимание на целесообразность дальнейшего накопления эмпирических данных, способных обеспечить реконструкцию геологической истории химических, в

том числе рудогенных элементов в междужильном пространстве мезотермальных золотых месторождений, сложенных разным по составу и происхождению субстратом, включая черные сланцы, в тесной связи с геологической историей рудовмещающих горных пород и в зависимости от степени металлоносности кварцевых жил и/или минерализованных зон. Обоснование реализуемого подхода дано в [2].