ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

т. 245 1975 г.

НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТНЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В этой статье рассмотрены следующие преобразования:

а. Преобразование многочлена по целым степеням z в сумму двух многочленов по степеням $1-z$ и $(1-z):z$.

б. Для вычисления функции $F(\alpha, 1; \gamma; z)$ предлагается ее представление суммой многочлена по степеням $z:(1-z)$ и функции $F(\alpha, 1; \gamma+n; z)$.

в. Даны соотношения между функцией $F(\alpha, \beta; \gamma; 1)$ и подобными функциями, параметры которых увеличены на целое число.

1. На основании равенств ([1], стр. 17, (4)—(6)) имеем

$$\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\alpha)_\kappa}{(\gamma)_\kappa}z^\kappa+\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}z^n F(\alpha+n, 1; \gamma+n; z)=$$
$$=(1-\gamma)\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\alpha)_\kappa}{(\alpha-\gamma+1)_{\kappa+1}}(1-z)^\kappa+$$
$$+\frac{(\alpha)_n(1-z)^n}{(\alpha-\gamma+1)_n}\left[-\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\gamma-\alpha-n)_\kappa}{(\gamma)_\kappa}\frac{z^\kappa}{(z-1)^{\kappa+1}}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\alpha-\gamma+1)_n}{(\gamma)_n}\left(\frac{z}{1-z}\right)^n F(\alpha+n, 1; \gamma+n; z)\right].$$

После раскрытия квадратных скобок и приведения подобных членов, а также после суммирования второй суммы в обратном порядке, окончательно получим:

$$T(z)=\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\alpha)_\kappa}{(\gamma)_\kappa}t^\kappa\equiv\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\alpha)_\kappa(1-\gamma)}{(\alpha-\gamma+1)_{\kappa+1}}(1-z)^\kappa+$$
$$+\frac{(\alpha)_n z^{n-1}}{(\gamma)_{n-1}}\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\gamma+n-1-\kappa)_\kappa}{(\alpha-\gamma+1)_{\kappa+1}}\left(\frac{1-z}{z}\right)^\kappa. \tag{1}$$

В частных случаях, при $z=1$ и $z=1$, $\gamma=1$ имеем

$$\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\alpha)_\kappa}{(\gamma)_\kappa}=\frac{(\alpha)_n-(\gamma-1)_n}{(\gamma)_{n-1}(\alpha-\gamma+1)};\quad\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\alpha)_\kappa}{\kappa!}=\frac{(\alpha+1)_{n-1}}{(n-1)!}. \tag{2}$$

2. Равенство ([1], стр. 17, (6))

$$F(\alpha,\ 1;\ \gamma;\ z)=\frac{1}{1-z}\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\gamma-\alpha)_\kappa}{(\gamma)_\kappa}\left(\frac{z}{z-1}\right)^\kappa+$$

$$+\frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n}\left(\frac{z}{z-1}\right)^n F(\alpha,\ 1;\ \gamma+n;\ z) \qquad (3)$$

можно с успехом применить для вычисления функции $F(\alpha,\ 1;\gamma\ ,z)$, так как многочлен, расположенный в правой части равенства (3), дает хорошее приближение для любых $|z|>0$, $Re\,z\leqslant 0$ и $\gamma>\alpha$. Функцию, расположенную в правой части равенства (3), разлагаем в цепную дробь, которая также дает хорошую сходимость. Кроме того, оценка остаточного члена подходящей дроби по модулю меньше модуля разности двух ближайших подходящих дробей в области $Re\,z\leqslant 0$.

С помощью ряда $F(\alpha,\ 1;\gamma\ ;z)$ можно вычислять элементарные функции $\operatorname{arctg} z$, $\ln(1+z)$, $(1+z)^{-\alpha}$ и другие функции.

3. После последовательного применения элементарных соотношений между смежными гипергеометрическими функциями ([2], стр. 111) по отношению к функции $F\equiv F(\alpha,\ \beta;\gamma\ ;\ 1)$ получим следующие равенства:

$$F=\frac{(\gamma-\alpha)_n(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n(\gamma-\alpha-\beta)_n}F(\alpha,\ \beta;\ \gamma+n;\ 1); \qquad (4)$$

$$F=\frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma-\alpha-\beta)_n}F(\alpha-n,\ \beta;\ \gamma;\ 1); \qquad (5)$$

$$F=\frac{(\gamma-\alpha)_{n+m}(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n(\gamma-\alpha-\beta)_{n+m}}F(\alpha-m,\ \beta;\ \gamma+n;\ 1); \qquad (6)$$

$$F=\frac{(\gamma-\alpha)_{n+m}(\gamma-\beta)_{n+\kappa}}{(\gamma)_n(\gamma-\alpha-\beta)_{n+m+\kappa}}F(\alpha-m,\ \beta-\kappa;\ \gamma+n;\ 1). \qquad (7)$$

Частным случаем функции $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ 1)$ является бета-функция

$$B(x,\ y)=\frac{1}{x}F(1-y,\ x;\ x+1;\ 1). \qquad (8)$$

Применение формул (4)—(7) к функции $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ 1)$ и представление подходящими дробями функций, расположенных в правых частях этих равенств, позволяет вычислять ее с высокой точностью и с наименьшей затратой времени на вычисление.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Корнилов. Выделение алгебраической части интегралов от биномных дифференциалов. Известия ТПИ, т. 131, стр. 17-20, 1965.

2. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.