

НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТНЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В этой статье рассмотрены следующие преобразования:

а. Преобразование многочлена по целым степеням z в сумму двух многочленов по степеням $1-z$ и $(1-z):z$.

б. Для вычисления функции $F(\alpha, 1; \gamma; z)$ предлагается ее представление суммой многочлена по степеням $z:(1-z)$ и функции $F(\alpha, 1; \gamma + n; z)$.

в. Даны соотношения между функцией $F(\alpha, \beta; \gamma; 1)$ и подобными функциями, параметры которых увеличены на целое число.

1. На основании равенств ([1], стр. 17, (4) — (6)) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_{\kappa}}{(\gamma)_{\kappa}} z^{\kappa} + \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n F(\alpha + n, 1; \gamma + n; z) = \\ = (1 - \gamma) \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_{\kappa}}{(\alpha - \gamma + 1)_{\kappa+1}} (1 - z)^{\kappa} + \\ + \frac{(\alpha)_n (1 - z)^n}{(\alpha - \gamma + 1)_n} \left[- \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\gamma - \alpha - n)_{\kappa}}{(\gamma)_{\kappa}} \frac{z^{\kappa}}{(z - 1)^{\kappa+1}} + \right. \\ \left. + \frac{(\alpha - \gamma + 1)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{1 - z} \right)^n F(\alpha + n, 1; \gamma + n; z) \right]. \end{aligned}$$

После раскрытия квадратных скобок и приведения подобных членов, а также после суммирования второй суммы в обратном порядке, окончательно получим:

$$\begin{aligned} T(z) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_{\kappa}}{(\gamma)_{\kappa}} t^{\kappa} \equiv \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_{\kappa} (1 - \gamma)}{(\alpha - \gamma + 1)_{\kappa+1}} (1 - z)^{\kappa} + \\ + \frac{(\alpha)_n z^{n-1}}{(\gamma)_{n-1}} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\gamma + n - 1 - \kappa)_{\kappa}}{(\alpha - \gamma + 1)_{\kappa+1}} \left(\frac{1 - z}{z} \right)^{\kappa}. \end{aligned} \quad (1)$$

В частных случаях, при $z = 1$ и $z = 1, \gamma = 1$ имеем

$$\sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_{\kappa}}{(\gamma)_{\kappa}} = \frac{(\alpha)_n - (\gamma - 1)_n}{(\gamma)_{n-1} (\alpha - \gamma + 1)}; \quad \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_{\kappa}}{\kappa!} = \frac{(\alpha + 1)_{n-1}}{(n - 1)!}. \quad (2)$$

2. Равенство ([1], стр. 17, (6))

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = \frac{1}{1-z} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\gamma-\alpha)_{\kappa}}{(\gamma)_{\kappa}} \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\kappa} + \\ + \frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n F(\alpha, 1; \gamma+n; z) \quad (3)$$

можно с успехом применить для вычисления функции $F(\alpha, 1; \gamma, z)$, так как многочлен, расположенный в правой части равенства (3), дает хорошее приближение для любых $|z| > 0$, $\operatorname{Re} z \leq 0$ и $\gamma > \alpha$. Функцию, расположенную в правой части равенства (3), разлагаем в цепную дробь, которая также дает хорошую сходимость. Кроме того, оценка остаточного члена подходящей дроби по модулю меньше модуля разности двух ближайших подходящих дробей в области $\operatorname{Re} z \leq 0$.

С помощью ряда $F(\alpha, 1; \gamma; z)$ можно вычислять элементарные функции $\operatorname{arctg} z$, $\ln(1+z)$, $(1+z)^{-a}$ и другие функции.

3. После последовательного применения элементарных соотношений между смежными гипергеометрическими функциями ([2], стр. 111) по отношению к функции $F \equiv F(\alpha, \beta; \gamma; 1)$ получим следующие равенства:

$$F = \frac{(\gamma-\alpha)_n (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n (\gamma-\alpha-\beta)_n} F(\alpha, \beta; \gamma+n; 1); \quad (4)$$

$$F = \frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma-\alpha-\beta)_n} F(\alpha-n, \beta; \gamma; 1); \quad (5)$$

$$F = \frac{(\gamma-\alpha)_{n+m} (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n (\gamma-\alpha-\beta)_{n+m}} F(\alpha-m, \beta; \gamma+n; 1); \quad (6)$$

$$F = \frac{(\gamma-\alpha)_{n+m} (\gamma-\beta)_{n+\kappa}}{(\gamma)_n (\gamma-\alpha-\beta)_{n+m+\kappa}} F(\alpha-m, \beta-\kappa; \gamma+n; 1). \quad (7)$$

Частным случаем функции $F(\alpha, \beta; \gamma; 1)$ является бета-функция

$$B(x, y) = \frac{1}{x} F(1-y, x; x+1; 1). \quad (8)$$

Применение формул (4)–(7) к функции $F(\alpha, \beta; \gamma; 1)$ и представление подходящими дробями функций, расположенных в правых частях этих равенств, позволяет вычислять ее с высокой точностью и с наименьшей затратой времени на вычисление.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Корнилов. Выделение алгебраической части интегралов от биноминых дифференциалов. Известия ТПИ, т. 131, стр. 17-20, 1965.
2. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.