

## ГРАНИЦЫ КОРНЕЙ НЕКОТОРЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье изучены границы корней многочленов (1) и (10), которые являются знаменателями следующей подходящей дроби

$$\Phi(1; 1 + \alpha; cx) = \frac{p_m(cx)}{q_m(cx)} + r_m(cx), m = 1, 2, \dots,$$

где

$$\Phi(1; 1 + \alpha; cx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx)^n}{(1 + \alpha)_n}, \alpha \neq -1, -2, \dots$$

1. Теорема. Все корни многочлена ( $c = a + bi$ )

$$q_{2\kappa+1}(cx) = \sum_{n=0}^{\kappa} C_{\kappa}^n \frac{(cx)^n}{(-\alpha - 2\kappa)_n}, \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

расположены в области  $Re z > 0$ ,  $z = ax + bxi$  и во внешней части окружности с центром в начале координат следующим радиусом:

$$R = 2 \sqrt{2\kappa + \alpha - 1}, \kappa = 1, 2, \dots; 0 \leq \alpha < 1, \quad (2)$$

Доказательство. В области  $Re z = ax \leq 0$  квадрат модуля [1]

$$\begin{aligned} |q_{2\kappa+1}(cx)|^2 &= \sum_{n=0}^{\kappa} \frac{C_{\kappa}^n (-\alpha - \kappa)_n |cx|^{2n}}{(-\alpha - 2\kappa)_n (-\alpha - 2\kappa)_{2n}} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\kappa-n} C_{\kappa-n}^m \frac{(2ax)^m}{(2n - \alpha - 2\kappa)_m} \end{aligned} \quad (3)$$

имеет все слагаемые больше нуля, поэтому все корни многочлена (1) расположены в области  $Re z > 0$ .

Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa}$  корни многочлена (1), тогда

$$q_{2\kappa+1}(cx) = \prod_{l=1}^{\kappa} \left(1 - \frac{cx}{\alpha_l}\right). \quad (4)$$

Если  $cx = ix$ , то на основании равенства (3)

$$|q_{2\kappa+1}(ix)|^2 = \prod_{l=1}^{\kappa} \left(1 + \frac{x^2}{\alpha_l^2}\right), \quad (5)$$

а также (здесь принято  $x^2 = u^{-1} > 0$ )

$$\begin{aligned} u^\kappa |q_{2\kappa+1}(i\sqrt{u})|^2 &= \sum_{n=0}^{\kappa} \frac{C_\kappa^n (-\alpha - \kappa)_n u^{\kappa-n}}{(-\alpha - 2\kappa)_n (-\alpha - 2\kappa)_{2n}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\kappa} a_n u^{\kappa-n}; \quad \kappa = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Найдем отношение предыдущего коэффициента к последующему для полинома (6)

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{n(2\kappa + \alpha + 1 - n)(2\kappa + \alpha + 1 - 2n)_2}{(\kappa - n + 1)(\kappa - n + 1 + \alpha)}; \quad n = 1, \dots, \kappa. \quad (7)$$

Минимум правой части равенства (7) для всех  $n$  одновременно устанавливается следующими легко проверяемыми неравенствами:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}}{a_n} &> \frac{4n(2\kappa + \alpha + 1 - n)(2\kappa + \alpha + 1 - 2n)}{2\kappa + \alpha + 2 - 2n} > \\ &> 4(2\kappa + \alpha - 1); \quad n = 1, \dots, \kappa; \quad 0 \leq \alpha < 1. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу (5), (8) и ([2], изд. 4, стр. 295 – 296)

$$\min |\alpha_l| \geq 2\sqrt{2\kappa + \alpha - 1} = R, \quad \kappa = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

что и требовалось доказать.

2. Теорема. Все корни многочлена

$$q_{2\kappa}(cx) = \sum_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \frac{(cx)^n}{(1 - \alpha - 2\kappa)_n}, \quad \kappa = 1, 2, \dots \quad (10)$$

расположены в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$ ,  $z = ax + bxi$  и во внешней части окружности с центром в начале координат следующим радиусом

$$R_1 = \begin{cases} \min \{ \sqrt{\kappa(\kappa + \alpha)(\alpha + 1)}, 2\sqrt{2\kappa + \alpha - 2} \}, \\ \quad \kappa = 1, \dots, 6; \\ 2\sqrt{2\kappa + \alpha - 2}, \quad \kappa = 7, 8, \dots; \quad 0 \leq \alpha < 1. \end{cases} \quad (11)$$

Доказательство. В области  $\operatorname{Re} z = ax \leq 0$  квадрат модуля (3) ( $\alpha$  необходимо заменить на  $\alpha - 1$ ) имеет положительные слагаемые, поэтому все корни многочлена (10) расположены в области  $\operatorname{Re} z < 0$ .

В силу (1), (3) – (6) имеем

$$\begin{aligned} u^\kappa |q_{2\kappa}(i\sqrt{u})|^2 &= \sum_{n=0}^{\kappa} \frac{C_\kappa^n (1 - \alpha - \kappa)_n u^{\kappa-n}}{(1 - \alpha - 2\kappa)_n (1 - \alpha - 2\kappa)_{2n}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\kappa} b_n u^{\kappa-n}, \quad \kappa = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Далее находим:

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{n(2\kappa + \alpha - n)(2\kappa + \alpha - 2n)_2}{(\kappa - n + 1)(\kappa - n + \alpha)}; \quad n = 1, \dots, \kappa. \quad (13)$$

Нетрудно проверить следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{b_{n-1}}{b_n} &> 8n \left( \kappa + \frac{\alpha}{2} - n \right) \left( \kappa + \frac{\alpha}{2} - \frac{n}{2} \right) : \left( \kappa + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} - n \right) > \\ &> 8n \left( \kappa + \frac{\alpha}{2} - n \right) \quad n = 1, \dots, \kappa; \quad 0 \leq \alpha < 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно правой части неравенства (14), минимумы  $b_{n-1}:b_n$  будут при  $n = 1$  и  $n = \kappa$  следующие:

$$\min \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{b_0}{b_1} > 4(2\kappa + \alpha - 2), \quad \kappa = 2, 3, \dots, \quad (15)$$

$$\min \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{b_{\kappa-1}}{b_\kappa} = \kappa(\kappa + \alpha)(\alpha + 1), \quad \kappa = 1, \dots, 6. \quad (16)$$

На основании неравенства (15) и равенств (12) и (16) получаем равенство (11), тем самым теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Корнилов. Приложение теории цепных дробей к вычислению некоторых типов интегралов. Изв. ТПИ, т. 205, 1972.
2. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. Изд. 6, Физматгиз, 1959.