

## ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье изучается вопрос о приложении цепных дробей к вычислению дзета-функции Римана (7), ее обобщений и вычисление функций, представленных рядами, слагаемые которых являются соответствующими дзета-функциями. Для последних рядов получены также обобщения, которые также можно вычислять с помощью цепных дробей.

1. Обобщенная дзета-функция определяется следующими равенствами ([1], стр. 40—43; [2], стр. 164, 9):

$$\zeta(s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (v+n)^{-s}, \quad v \neq 0, -1, -2, \dots, \quad s > 1; \quad (1)$$

$$\zeta(s, v) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} e^{-nt} e^{-vt} t^{s-1} dt \right], \quad v > 0, \quad s > 0; \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta(\kappa, v) &= \frac{1}{2v^{\kappa}} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^{\kappa-2} t \sin(\kappa t) dt}{v^{\kappa-1} \operatorname{th}(\pi v \operatorname{tg} t)}, \quad v > 0, \\ \kappa &= 2, 3, \dots; \quad \varphi_m = \cos^m t (\sin mt + \cos mt) \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Пусть

$$(v+n)^{-s} = c_n, \quad \zeta(n, v) = d_n, \quad (4)$$

тогда в силу равенств (1)–(4), теоремы ([3], стр. 211), а также ([4], стр. 226; [5], стр. 153; [6], задача 943) определители

$$\begin{vmatrix} c_{p-1} & \dots & c_{p+m-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{p+m-2} & \dots & c_{p+2m-3} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d_{p+1} & \dots & d_{p+m} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{p+m} & \dots & d_{p+2m-1} \end{vmatrix}; \quad (5)$$

$p, m = 1, 2, \dots$

положительны.

2. Функции ([1], стр. 42, 47)

$$\Phi(z, s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (v+n)^{-s} z^n, \quad |z| < 1, \quad v \neq 0, -1, \dots; \quad (6)$$

$$\zeta(s) = \zeta(s, 1) = \Phi(1, s, 1) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad s > 0. \quad (7)$$

на основании положительных значений первых определителей (5), представляются цепными дробями с положительными членами звеньев. Таким образом, получаем следующие подходящие дроби для функций (6) и (7), а также имеем соответствующую оценку остаточного члена по модулю (см. [7]; [8], стр. 27—30).

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(z, s, v) = P_{2n}(z) : Q_{2n}(z) + R_{2n}(z) = \\ = \left| \begin{array}{cccc} 0 & S_0 z^{n-1} & \dots & S_{n-1} \\ c_0 & c_1 & & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cccc} z^n & \dots & \dots & 1 \\ c_0 & \dots & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & \dots & \dots & c_{2n-1} \end{array} \right| + \\ + R_{2n}(z); n = 1, 2, \dots; S_n = \sum_{\kappa=0}^n (v + \kappa)^{-s} z^\kappa; \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \left[ \frac{P_{2n}(-1)}{Q_{2n}(-1)} + R_{2n}(-1) \right], \quad v = 1, n = 1, 2, \dots; \quad (9)$$

$$|R_{2n}(z)| < \left| \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} - \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} \right|, \quad \operatorname{Re} z \leq 0. \quad (10)$$

3. Если в равенстве ([1], стр. 60)

$$\psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right), \quad \gamma = 0,577 \dots \quad (11)$$

воспользоваться разложением

$$\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{z+\kappa} = \frac{z}{\kappa^2} - \frac{z^2}{\kappa^3} + \frac{z^3}{\kappa^4} - \dots, \quad |z| < \kappa,$$

то получим

$$\left\{ \begin{aligned} \psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\kappa-1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n, \kappa) z^{n-1}, \quad |z| < \kappa. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Интегрируя равенство (12), находим ([1], стр. 30, (1))

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{n=1}^{\kappa-1} \left[ \frac{z}{n} - \ln \left( 1 + \frac{z}{n} \right) \right] + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n, \kappa) \frac{z^n}{n}, \quad |z| < \kappa. \end{aligned} \quad (13)$$

Степенные ряды (12) и (13) в силу положительных значений вторых определителей (5) представляются цепными дробями с положительными членами звеньев. Таким путем, согласно равенству (8), получим аналогичные подходящие дроби для рядов (12) и (13) и, согласно неравенству (10), аналогичную оценку остаточного члена ([9], задача 1220).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.
2. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.-Л., Гостехиздат, 1948.

3. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957.
  4. В. Л. Данилов, А. И. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.
  5. А. П. Мишина и И. В. Проскуряков. Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра), М., Физматгиз, 1962.
  6. Д. К. Фадеев и И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. М., Гостехиздат, 1956.
  7. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению обобщенных гипергеометрических функций. Изв. ТПИ, т. 205, 1972.
  8. Т. И. Стильтъес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
  9. И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. М., Гостехиздат, 1957.
-