ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 249 1973

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ФУНКЦИИ РИМАНА ПРИ ПОМОЩИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье изучается вопрос о представлении степенного ряда, в который разлагается кратный интеграл, цепной дробью с положительными членами звеньев. Остаточный член по модулю меньше модуля разности двух подходящих дробей в интервале $-1 \leqslant z < 0$.

1. Дзета-функция Римана ([1], стр. 47)

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad s > 0 \tag{1}$$

является частным случаем функции ([1], стр. 42, 43)

$$\Phi(z, s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (v+n)^{-s} z^n, \quad -1 \leqslant z < 1, \quad v > 0. \tag{2}$$

Поскольку

$$\Gamma(s) z^n = (v+n)^s \int_0^{\infty} e^{-vt} t^{s-1} (ze^{-t})^n dt, \quad s > 0, \tag{3}$$

то из формулы ([1], стр. 15 (5))

$$\Gamma(s) = (v+n)^s \int_0^{\infty} e^{-(v+n)t} t^{s-1} dt, \quad s > 0 \tag{4}$$

получается интегральная формула ([1], стр. 43 (3))

$$\Gamma(s)\Phi(z, s, v) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{(1-v)t} (e^t - z)^{-1} dt, \quad s > 0. \tag{5}$$

На основании равенства (4) имеем

$$[\ln(v+n)]^{-s} \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t \ln(v+n)} t^{s-1} dt, \quad v > 1, \tag{6}$$

так как $e^{-t \ln(v+n)} \equiv (v+n)^{-t}$, то

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{(v+n)^t} = \frac{\Gamma(s)}{\ln^s(v+n)}, \quad v > 1. \; s > 0. \tag{7}$$

Учитывая равенство (7), вычислим интеграл от обеих частей равенства (2)

$$I_1=\int_0^\infty\left[\sum_{n=0}^\infty\frac{z^n\,dt}{(v+n)^t}=\sum_{n=0}^\infty\frac{z^n}{\ln(v+n)}\,,\quad v>1;\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} I_1=\int\limits_0^\infty\frac{ds}{\Gamma(s)}\int\limits_0^\infty\frac{t^{s-1}e^{(1-v)t}}{e^t-z}\,dt=\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{z^n}{\ln(v+n)}\,,\\ v>1.\end{array}\right. \tag{8}$$

Интеграл I_1 можно обобщить

$$\left\{\begin{array}{l} I_2=\int\limits_0^\infty\frac{z^{\nu-1}\,ds}{\Gamma(s)}\int\limits_0^\infty\frac{t^{s-1}e^{(1-v)t}}{e^t-z}\,dt=\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{z^n}{\ln^\nu(v+n)}\,,\\ \qquad v>1,\ \nu>0.\end{array}\right. \tag{9}$$

2. В силу элементарных интегралов

$$\int_0^\infty\frac{d\nu}{\ln^\nu(v+n)}=\frac{1}{\ln[\ln(v+n)]}\,,\quad v>e;$$

$$\int_0^\infty\frac{d\nu}{\ln^{\nu_1\nu}(v+n)}=\frac{1}{\ln[\ln^{\nu_1}(v+n)]}\,,\quad v>e$$

и интеграла (9) нетрудно представить в виде степенного ряда следующий кратный интеграл

$$\left\{\begin{array}{l} I_1=\int\limits_0^\infty u_2^{\nu_1-1}\,du_2\int\limits_0^\infty\frac{u_1^{\nu u_2-1}\,du_1}{\Gamma(u_1)}\int\limits_0^\infty\frac{u^{u_1-1}e^{(1-v)u}}{e^u-z}\,du=\\ \quad=\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{z^n}{\ln^{\nu_1}[\ln^\nu(v+n)]}=\sum\limits_{n=0}^\infty c_n z^n,\\ \quad\nu,\ \nu_1>0,\ v>e.\end{array}\right. \tag{10}$$

Определитель Грама

$$\Delta_\kappa=\begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_\kappa\\ & \dots & \\ c_\kappa & \dots & c_{2\kappa}\end{vmatrix}>0$$

на основании того, что c_n являются степенными моментами

$$c_n=\int_0^\infty u_2^{\nu_1-1}\,du_2\int_0^\infty\frac{u_1^{\nu u_2-1}\,du_1}{\Gamma(u_1)}\int_0^\infty u^{u_1-1}\,e^{-(v+n)u}\,du$$

для системы $1,\ e^{-u},\ \dots,\ e^{-nu},\dots$

В силу $\Delta_\kappa>0$ по отношению к ряду (10) соответствующая цепная дробь ([2], стр. 229) имеет положительные члены звеньев

([3], стр. 23—30). Для интеграла (10), представленного суммой подходящей дроби и остаточного члена $R_{2\kappa}$, имеем

$$I_1 = \frac{P_{2\kappa}}{Q_{2\kappa}} + R_{2\kappa}, \quad R_m \equiv R_m(z);$$

$$|R_{2\kappa}| < \left| \frac{P_{2\kappa+1}}{Q_{2\kappa+1}} - \frac{P_{2\kappa}}{Q_{2\kappa}} \right|, \ -1 \leqslant z < 0 \quad ([4], \text{ стр. } 63).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М., Физматгиз, 1965.
2. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова и др. Математический анализ. М., Физматгиз, 1965.
3. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
4. Б. П. Демидович и И. А. Марон. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1963.