

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ФУНКЦИИ РИМАНА ПРИ ПОМОЩИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье изучается вопрос о представлении степенного ряда, в который разлагается кратный интеграл, цепной дробью с положительными членами звеньев. Остаточный член по модулю меньше модуля разности двух подходящих дробей в интервале $-1 \leq z < 0$.

1. Дзета-функция Римана ([1], стр. 47)

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad s > 0 \quad (1)$$

является частным случаем функции ([1], стр. 42, 43)

$$\Phi(z, s, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (\nu + n)^{-s} z^n, \quad -1 \leq z < 1, \quad \nu > 0. \quad (2)$$

Поскольку

$$\Gamma(s) z^n = (\nu + n)^s \int_0^{\infty} e^{-\nu t} t^{s-1} (ze^{-t})^n dt, \quad s > 0, \quad (3)$$

то из формулы ([1], стр. 15 (5))

$$\Gamma(s) = (\nu + n)^s \int_0^{\infty} e^{-(\nu+n)t} t^{s-1} dt, \quad s > 0 \quad (4)$$

получается интегральная формула ([1], стр. 43 (3))

$$\Gamma(s) \Phi(z, s, \nu) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{(1-\nu)t} (e^t - z)^{-1} dt, \quad s > 0. \quad (5)$$

На основании равенства (4) имеем

$$[\ln(\nu + n)]^{-s} \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t \ln(\nu+n)} t^{s-1} dt, \quad \nu > 1, \quad (6)$$

так как $e^{-t \ln(\nu+n)} \equiv (\nu + n)^{-t}$, то

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{(\nu + n)^t} = \frac{\Gamma(s)}{\ln^s(\nu + n)}, \quad \nu > 1, \quad s > 0. \quad (7)$$

Учитывая равенство (7), вычислим интеграл от обеих частей равенства (2)

$$I_1 = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n dt}{(v+n)^t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\ln(v+n)}, v > 1; \right.$$

$$\left. \begin{cases} I_1 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{(1-v)t}}{e^t - z} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\ln(v+n)}, \\ v > 1. \end{cases} \quad (8)$$

Интеграл I_1 можно обобщить

$$\left\{ \begin{aligned} I_2 = \int_0^{\infty} \frac{z^{\nu-1} ds}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{(1-\nu)t}}{e^t - z} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\ln^{\nu}(v+n)}, \\ v > 1, \nu > 0. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

2. В силу элементарных интегралов

$$\int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\ln^{\nu}(v+n)} = \frac{1}{\ln[\ln(v+n)]}, v > e;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\ln^{\nu_1 \nu}(v+n)} = \frac{1}{\ln[\ln^{\nu_1}(v+n)]}, v > e$$

и интеграла (9) нетрудно представить в виде степенного ряда следующий кратный интеграл

$$\left\{ \begin{aligned} I_1 = \int_0^{\infty} u_2^{\nu_1-1} du_2 \int_0^{\infty} \frac{u_1^{\nu_1 u_2-1} du_1}{\Gamma(u_1)} \int_0^{\infty} \frac{u^{u_1-1} e^{(1-\nu)u}}{e^u - z} du = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\ln^{\nu_1}[\ln^{\nu}(v+n)]} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \\ \nu, \nu_1 > 0, v > e. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Определитель Грама

$$\Delta_{\kappa} = \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_{\kappa} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{\kappa} & \dots & c_{2\kappa} \end{vmatrix} > 0$$

на основании того, что c_n являются степенными моментами

$$c_n = \int_0^{\infty} u_2^{\nu_1-1} du_2 \int_0^{\infty} \frac{u_1^{\nu_1 u_2-1} du_1}{\Gamma(u_1)} \int_0^{\infty} u^{u_1-1} e^{-(v+n)u} du$$

для системы $1, e^{-u}, \dots, e^{-nu}, \dots$

В силу $\Delta_{\kappa} > 0$ по отношению к ряду (10) соответствующая цепная дробь ([2], стр. 229) имеет положительные члены звеньев

([3], стр. 23—30). Для интеграла (10), представленного суммой под-
ходящей дроби и остаточного члена $R_{2\kappa}$, имеем

$$I_1 = \frac{P_{2\kappa}}{Q_{2\kappa}} + R_{2\kappa}, \quad R_m \equiv R_m(z),$$

$$|R_{2\kappa}| < \left| \frac{P_{2\kappa+1}}{Q_{2\kappa+1}} - \frac{P_{2\kappa}}{Q_{2\kappa}} \right|, \quad -1 \leq z < 0 \quad ([4], \text{ стр. 63}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М., Физматгиз, 1965.
2. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова и др. Математический анализ. М., Физматгиз, 1965.
3. Т. И. Стильтес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
4. Б. П. Демидович и И. А. Марон. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1963.