ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 249 1973

УСИЛЕНИЕ СХОДИМОСТИ ЦЕПНОЙ ДРОБИ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В этой статье дан пример асимптотической сходимости цепной дроби к некоторой функции в указанной далее в тексте области комплексного переменного w

$$\varphi(w) = P_{2\kappa}(w)\cdot[Q_{2\kappa}(w)]^{-1} + R_{2\kappa}(w), \ |w| > 1. \tag{1}$$

Функция $\varphi(w)$ зависит от функции $f(z)$ и выбирается таким образом, чтобы при дальнейшем преобразовании подходящих дробей $P_\kappa(w)\,[Q_\kappa(w)]^{-1}$ можно было получить некоторое приближение для функции $f(z)$:

$$f(z) = P_{2\kappa}(z)\,[q_{2\kappa}(z)]^{-1} + r_{2\kappa}(z), \ |z| > 1. \tag{2}$$

Изложенный метод усиления сходимости цепной дроби можно с успехом применять и для других цепных дробей с положительными членами звеньев.

1. Умножим слагаемые ряда (3) на множитель $\sqrt{(-1)^\kappa} = i^\kappa$ и отделим вещественную часть ряда и т. д., после m-кратных одинаковых преобразований получим следующий ряд (4):

$$\varphi(w) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} p^{\kappa^2}\left(-\frac{1}{w}\right)^n; \ p > 1, \ |w| \gg 1; \tag{3}$$

$$f(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} q^{\kappa^2}\left(-\frac{1}{z}\right)^\kappa; \ p = q^{4-m}, \ |w| = |z|^{2-m}, \tag{4}$$

По отношению к ряду (3) цепная дробь (вычисляются определители A_n, B_n ([1], стр. 28), а затем a_j, b_j):

$$\varphi(w) = \frac{1}{1} + \frac{p}{w} + \ldots + \frac{p^{2n-1}(p^{2n}-1)}{1} + \frac{p^{4n+1}}{w} + \ldots \tag{5}$$

имеет следующую сумму членов a_j с нечетными индексами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} = 1 + \sum_{1=n}^{\infty} \frac{p^{n^2-n}}{(p^2-1)\ldots(p^{2n}-1)} > e^{\frac{n}{p^2-1}} = e^{н}. \tag{6}$$

На основании равенств (4) и (6) получим

$$q = e^\sigma, \ m \approx (\ln 2\sigma\, н)(\ln 8)^{-1}$$

и по заданному m или $н$ мы можем найти $н$ или m.

2. Цепная дробь (5) по отношению к функции $\varphi(w)$ сходится асимптотически в плоскости комплексного переменного w за исключением круга $R \leqslant 1$ и разреза $[R, -\infty]$. Асимптотическая сходимость вытекает из того, что

1) Для любого $p > 1$ найдется такое m, что $p^2 > 1 + p^{2-2m}$, тогда

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{p^{n^2-n}}{(p^2-1)\dots(p^{2n}-1)} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{C\,p^{\kappa(\kappa+2m-1)}}{(p^{2m}-1)\dots(p^{2m+2\kappa}-1)} <$$

$$< \frac{C\,(Cp^{2m}-1)}{p^{2m}-1-p^{2m-2})},$$

и цепная дробь сходится по крайней мере к двум различным функциям ([1], стр. 5).

2) Подходящие дроби $P_\kappa : Q_\kappa$ сходятся асимптотически к функции $\varphi(w)$ в названной выше области в силу следующего равенства ([2], стр. 466):

$$\lim_{w \to \infty} w^{2n-1}\{\varphi(w) - P_{2n} : Q_{2n}\} = 0. \tag{7}$$

Докажем равенство (7). При $w \to \infty$ цепная дробь (5) сходится к функции $\varphi(w)$ в силу $\lim\limits_{w\to\infty} w \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \infty$. Для любого w из области $\|w\| > 1$, $\arg w \neq \pi$ точное значение верхней грани $\sup|P_\kappa : Q_\kappa - P_{2n} : Q_{2n}|$ будет в общем случае при $\kappa = 2n + 2m + 1$ $(m = 0, 1, \dots)$; тогда ([3], стр. 450)

$$\lim_{w\to\infty} |w^{2n-1}\{\varphi(w) - P_{2n} : Q_{2n}\}| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{w\to\infty} |w^{2n-1}|\sup|P_\kappa : Q_\kappa - P_{2n} : Q_{2n}| =$$

$$= \lim_{w\to\infty} \left| \frac{w^{2n-1} p^{3n^2-n}(p^2-1)\dots(p^{2n}-1)(w^m+\dots)}{(w^{2n+m}+\dots)} \right| = 0,$$

и равенство (7) доказано.

4. На основании того, что численное значение всей суммы (6) и ее частичной суммы может быть очень большим, мы можем (неограниченно приближая p к единице) получить приближения для $\varphi(w)$ такие, что при $w = 1$ и некотором κ $|R_{2\kappa}| < \varepsilon$, где, предположим, $\varepsilon \approx 10^{-10}$. Далее w в подходящей дроби (1) умножается на i и отделяется ее вещественная часть и т. д., то есть последовательно преобразуем подходящую дробь (1) m раз и, заменяя в полученном приближении w переменной z, получим приближение вида (2) для функции $f(z)$. Таким образом мы получим приближение для $f(z)$ в области $|z| > 1$, $\arg z \neq \pi$ такое, что остаточный член $|r_{2\kappa}| < \delta$, где, предположим, $\delta \approx 10^{-5}$. На основании вышеизложенного ε зависит от δ, m, κ: $\varepsilon = \psi(\delta, m, \kappa)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.

2. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1965.

3. С. С. Хлопонин. Ученые записки Марийского пединститута. Т. XXVI, Йошкар-Ола, 1965, стр. 445—486.