

О НЕГОЛОНОМНЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ГАМБЬЕ

М. Р. ВАЙНТРУБ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В работе изучаются неголономные конгруэнции окружностей комплекса, у которых циклические точки являются двукратными фокусами. Устанавливается связь таких конгруэнций с неголономными линейчатыми конгруэнциями, ассоциированными с комплексом осей.

1. В трехмерном евклидовом пространстве E_3 рассматриваются комплексы окружностей, плоскости которых образуют трехпараметрическое семейство (комплексы {3.3}). С каждой окружностью комплекса {3.3} ассоциируется локальный ортонормированный репер $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, начало A которого совмещено с центром текущей окружности комплекса, а векторы e_1 и e_2 располагаются в плоскости этой окружности. Инфинитезимальное перемещение репера определяется уравнениями

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где формы Пфаффа ω^α , ω_α^β удовлетворяют условиям кососимметричности и структурным уравнениям Картана ([1], стр. 137—138). Относительно таким образом выбранного репера уравнения текущей окружности комплекса {3.3} записываются в виде

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - R^2 = 0, \quad x^3 = 0. \quad (2)$$

Шесть форм Пфаффа $\omega^i \equiv \omega_i$, ω_3^i , ω^3 , $\Theta_0 \equiv -RdR$, ($i, j = 1, 2$) являются первичными формами окружности в E_3 . Выберем в качестве базисных формы ω_3^i , ω^3 , которые определяют положение плоскости окружности в пространстве. Тогда замкнутая система дифференциальных уравнений комплекса {3.3} запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= \Gamma_{0i} \omega_3^i + \Gamma_{03} \omega^3, \\ \omega_i &= \Gamma_{ij} \omega_3^j + \Gamma_{i3} \omega^3, \\ [\Delta \Gamma_{0i} \omega_3^i] + [\Delta \Gamma_{03} \omega^3] &= 0, \\ [\Delta \Gamma_{ij} \omega_3^j] + [\Delta \Gamma_{i3} \omega^3] &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_{0i} &= d\Gamma_{0i} - \Gamma_{0\kappa} \omega_i^\kappa - \Gamma_{03} \omega_i^3, \\ \Delta \Gamma_{03} &= d\Gamma_{03}, \\ \Delta \Gamma_{ii} &= d\Gamma_{ii} - (\Gamma_{i\kappa} + \Gamma_{\kappa i}) \omega_i^\kappa - \Gamma_{i3} \omega_i^3, \\ \Delta \Gamma_{i\kappa} &= d\Gamma_{i\kappa} + (\Gamma_{ii} - \Gamma_{\kappa\kappa}) \omega_i^\kappa - \Gamma_{i3} \omega_\kappa^3, \\ \Delta \Gamma_{i3} &= d\Gamma_{i3} - \Gamma_{\kappa 3} \omega_i^\kappa - \omega_i^3, \end{aligned} \quad (4)$$

($\kappa \neq i = 1, 2$; по κ не суммировать!)

Осуществляя построение цепи интегральных элементов по формам базиса $\omega_3^1, \omega_3^2, \omega^3$, убеждаемся, что комплексы {3.3} существуют и определяются с произволом 3 функций 3 аргументов.

2. Определение 1. Основным диаметром окружности комплекса {3.3} называется такой диаметр, которому соответствует однопараметрическое семейство окружностей с касательной к линии центров, ортогональной этому диаметру.

Уравнения вида

$$\Gamma_{12}(x^1)^2 + (\Gamma_{22} - \Gamma_{11})x^1x^2 - \Gamma_{21}(x^2)^2 = 0, \quad x^3 = 0 \quad (5)$$

определяют два действительных, два мнимых или один основной диаметр.

Определение 2. Точки пересечения окружности с ее основными диаметрами называются основными точками окружности комплекса. Используя основные диаметры и основные точки окружности, можно произвести окончательную канонизацию репера комплекса {3.3}, направив вектор $\bar{e}_1$ репера либо в основную точку, либо по биссектрисе угла между основными направлениями.

Одно не вполне интегрируемое уравнение Пфаффа

$$\omega^3 = 0$$

можно рассматривать как уравнение неголономной поверхности, ортогональной оси окружности и описываемой ее центром. Разыскивая линии кривизны второго рода на неголономной поверхности центров (A) $\omega^3=0$, убеждаемся, что им соответствуют подмногообразия, ассоциированные с основными диаметрами окружности комплекса. Это позволяет дополнить геометрическую картину канонизации репера. В дальнейшем будем предполагать, что с каждой окружностью комплекса {3.3} ассоциирован некоторый канонический репер.

3. Произвольная неголономная конгруэнция окружностей комплекса {3.3} определяется одним не вполне интегрируемым уравнением Пфаффа [2].

$$\omega \equiv a\omega_3^1 + b\omega_3^2 - c\omega^3 = 0, \quad (6)$$

где

a, b, c — инварианты неголономной конгруэнции (6), являющиеся функциями первичных параметров.

Разыскивая фокусы неголономной конгруэнции $(\bar{A}\bar{e}_3)_{\omega=0}$ соответствующей конгруэнции (6), убеждаемся, что конгруэнциям $c=0$ соответствуют неголономные цилиндрические конгруэнции в комплексе осей. Исключая из рассмотрения такие конгруэнции, будем считать $c=1$.

Фокусы и фокальные семейства конгруэнции $\omega=0$ определяются системой уравнений:

$$\begin{aligned} (x^1)^2 + (x^2)^2 - R^2 &= 0, \quad x^3 = 0, \\ (x^i\Gamma_{i1} - \Gamma_{01})\omega_3^1 + (x^i\Gamma_{i2} - \Gamma_{02})\omega_3^2 + (x^i\Gamma_{i3} - \Gamma_{03})\omega^3 &= 0, \\ x^1\omega_3^1 + x^2\omega_3^2 - \omega^3 &= 0, \\ a\omega_3^1 + b\omega_3^2 - \omega^3 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\begin{aligned} A &= b\Gamma_{13} + \Gamma_{12}, \quad B = a\Gamma_{23} + \Gamma_{21}, \\ C &= b\Gamma_{23} - a\Gamma_{13} + \Gamma_{22} - \Gamma_{11}, \\ D &= b(\Gamma_{11} - \Gamma_{03}) - a\Gamma_{12} - \Gamma_{02}, \\ E &= b\Gamma_{21} - a(\Gamma_{22} - \Gamma_{03}) + \Gamma_{01}, \\ F &= a\Gamma_{02} - b\Gamma_{01}. \end{aligned} \quad (8)$$

Исключая из уравнений (7) отношение $\omega_1^1 : \omega_2^2 : \omega^3$ базисных форм, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}(x^1)^2 + (x^2)^2 - R^2 &= 0, \quad x^3 = 0, \\ A(x^1)^2 - B(x^2)^2 + Cx^1x^2 + Dx^1 + Ex^2 + F &= 0,\end{aligned}\quad (9)$$

которая определяет координаты фокусов конгруэнции. Эта система эквивалентна уравнениям

$$\begin{aligned}(x^1)^2 + (x^2)^2 - R^2 &= 0, \quad x^3 = 0, \\ [C^2 + (A+B)^2](x^2)^4 + [2CD - 2E(A+B)](x^2)^3 + \\ + [D^2 - C^2R^2 + E^2 - 2(A+B)(F+AR^2)](x^2)^2 + \\ + [2E(F+AR^2) - 2CDR^2]x^2 + (F+AR^2)^2 - R^2D^2 &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

4. Определение 3. Конгруэнциями Гамбье [3, 4] неголономными или голономными называются такие конгруэнции окружностей, у которых циклические точки являются двукратными фокусами. Из (8) и (10) следует, что такие конгруэнции характеризуются условиями

$$A + B = 0, \quad C = 0 \quad (11)$$

и существуют в произвольном комплексе.

Теорема 1. Неголономная конгруэнция комплекса {3.3} тогда и только тогда является конгруэнцией Гамбье, когда граничные точки соответствующей неголономной конгруэнции осей совпадают.

Доказательство. Рассуждая обычным образом ([5], стр. 52), для нахождения абсцисс граничных точек неголономной конгруэнции $(\overline{Ae}_3)_{\omega=0}$ получаем квадратное уравнение, дискриминант которого определяется по формуле

$$\overline{D} = C^2 + (A+B)^2. \quad (12)$$

Справедливость утверждения теоремы следует из сравнения условий (11) с условиями обращения в нуль дискриминанта (12).

Теорема 2. Неголономной конгруэнции Гамбье, принадлежащей комплексу {3.3}, соответствует бицентральная [6] неголономная конгруэнция в комплексе осей.

Доказательство. Бицентральная неголономная конгруэнция в комплексе осей определяется условием

$$\begin{aligned}2\Gamma_{13}\Gamma_{23}(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}) + (\Gamma_{11} - \Gamma_{22})[(\Gamma_{13})^2 - (\Gamma_{23})^2] + \\ + (a\Gamma_{13} + b\Gamma_{23})[(\Gamma_{13})^2 + (\Gamma_{23})^2] &= 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Используя (8), из (11) получаем:

$$\begin{aligned}a &= \frac{\Gamma_{13}(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) - \Gamma_{23}(\Gamma_{12} + \Gamma_{21})}{(\Gamma_{13})^2 + (\Gamma_{23})^2}, \\ b &= -\frac{\Gamma_{13}(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}) + \Gamma_{23}(\Gamma_{22} - \Gamma_{11})}{(\Gamma_{13})^2 + (\Gamma_{23})^2}.\end{aligned}\quad (14)$$

Подставляя значения a и b из (14) в условие (13), убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.—Л., 1948.
2. Р. Н. Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Труды Томского университета. Т. 191, сер. механико-математическая, 1967, стр. 179—184.
3. Gambier, M. B., C. R., t. 195, 1932, p. 928.
4. Vincensini, P., Points focaux des cercles d'une congruence, C. R., t. 195, 1932, pp. 1359—1361.
5. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Киев, 1963.
6. Р. Н. Щербаков. Эквивариантно-инвариантные неголономные конгруэнции линейчатого комплекса. Математический сборник. Т. 60 (102), № 2, 1963, стр. 131—158.