ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 249 1973

РАССЛОЕНИЕ КОМПЛЕКСОВ {2. 3} НА ЦИКЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

М. Р. ВАЙНТРУБ

(Представлена кафедрой высшей математики)

Общие комплексы окружностей в трехмерном евклидовом пространстве принадлежат трехпараметрическому семейству плоскостей. Однако представляет интерес рассмотрение таких комплексов, плоскости окружностей которых образуют семейства меньшей размерности по сравнению с размерностью самого многообразия окружностей. Такие комплексы окружностей рассматривались в [1] и были названы вырожденными. В трехмерном проективном пространстве вырожденные комплексы коник изучались в [2].

В данной работе в трехмерном евклидовом пространстве рассматриваются комплексы {2.3} (комплексы окружностей, плоскости которых образуют двухпараметрическое семейство), расслаивающиеся на циклические системы ([3], стр. 107). Устанавливаются некоторые свойства таких комплексов.

1. Замкнутая система дифференциальных уравнений комплекса {2.3}, с каждой окружностью

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - R^2 = 0, \quad x^3 = 0 \tag{1}$$

которого ассоциируется локальный канонический репер $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, [1], может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \Gamma_{1i}\,\omega_3^i + \Gamma_{10}\Theta^0,\\
&\omega_2 = \Gamma_{2i}\,\omega_3^i, \quad \omega^3 = \Gamma_{0i}^3\,\omega_3^i,\\
&\omega_1^2 = \Gamma_0\Theta^0 + \Gamma_i\,\omega_3^i,\\
&[\Delta\Gamma_{1i}\,\omega_3^i] + [\Delta\Gamma_{10}\Theta^0] = 0,\\
&[\Delta\Gamma_{2i}\,\omega_3^i] = 0, \quad [\Delta\Gamma_{0i}^3\,\omega_3^i] = 0,\\
&[\Delta\Gamma_0\Theta^0] + [\Delta\Gamma_i\,\omega_3^i] = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\Gamma_{10} > 0$ вследствие ориентации вектора $\bar{e}_1$ репера, $\Theta^0 = -RdF$, $\omega^i \equiv \omega_i$ и $(i, j, \kappa = 1, 2$; по κ — не суммировать!)

$$\begin{aligned}
&\Delta\Gamma_{0i}^3 = d\Gamma_{0i}^3 - \Gamma_{0\kappa}^3\,\omega_i^\kappa + \omega_i,\\
&\Delta\Gamma_{11} = d\Gamma_{11} - \Gamma_{12}\omega_1^2 + \Gamma_1\omega^2 - \omega^3, \quad \Delta\Gamma_0 = d\Gamma_0,\\
&\Delta\Gamma_{12} = d\Gamma_{12} - \Gamma_{11}\omega_2^1 + \Gamma_2\omega^2, \quad \Delta\Gamma_1 = d\Gamma_1 - \Gamma_2\omega_1^2,\\
&\Delta\Gamma_{10} = d\Gamma_{10} + \Gamma_0\omega^2, \qquad \Delta\Gamma_2 = d\Gamma_2 - \Gamma_1\omega_2^1 + \omega_3^1,\\
&\Delta\Gamma_{21} = d\Gamma_{21} - \Gamma_{22}\omega_1^2 - \Gamma_1\omega^1 + \Gamma_0\Gamma_{11}\Theta^0,\\
&\Delta\Gamma_{22} = d\Gamma_{22} - \Gamma_{21}\omega_2^1 - \Gamma_2\omega^1 + \Gamma_0\Gamma_{12}\Theta^0 - \omega^3.
\end{aligned} \tag{3}$$

Предполагается, что формы Пфаффа ω^α, ω_α^β, $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ удовлетворяют условиям кососимметричности и структурным уравнениям Картана ([4], стр., 137—138).

Комплекс $\{2.3\}$ расслаивается на ∞^1 конгруэнций

$$\omega \equiv a\omega_3^1 + b\omega_3^2 + c\Theta^0 = 0, \tag{4}$$

если уравнение (4) вполне интегрируемо, то есть

$$[D\omega, \omega] = 0. \tag{5}$$

Полагая

$$\begin{aligned} da &= a_i\omega_3^i + a_3\Theta^0, \\ db &= b_i\omega_3^i + b_3\Theta^0, \\ dc &= c_i\omega_3^i + c_3\Theta^0, \end{aligned} \tag{6}$$

из (5) получаем условие

$$\begin{aligned} &(b_3 - c_2 + a\Gamma_0)\, a - (a_3 - c_1 - b\Gamma_0)\, b - \\ &- (b_1 - a_2 + a\Gamma_1 + b\Gamma_2)c = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

расслоения комплекса $\{2.3\}$ на конгруэнции (4).

2. Окружности голономной конгруэнции $\omega = 0$ комплекса $\{2.3\}$ образуют циклическую систему, если эта конгруэнция допускает ∞^1 поверхностей, ортогональных ко всем ее окружностям. Рассуждая известным способом ([3], стр. 107—108), получаем:

$$\begin{aligned} &R^2[\omega^3\omega_3^1] + [\Theta^0\omega^1] \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\omega), \\ &R^2[\omega^3\omega_3^2] + (\Theta^0\omega^2) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\omega), \\ &R^2[\omega_3^1\omega_3^2] + [\omega^1\omega^2) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\omega). \end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) с учетом системы дифференциальных уравнений (2) следует, что

$$\begin{aligned} &a\Gamma_{12} - b\Gamma_{11} + cR^2\Gamma_{02}^3 = 0, \\ &a\Gamma_{22} - b\Gamma_{21} - cR^2\Gamma_{01}^3 = 0, \\ &a\Gamma_{10}\Gamma_{22} - b\Gamma_{10}\Gamma_{21} - c\,(R^2 + \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21}) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Анализ уравнений (7) и (9) показывает, что произвольный комплекс $\{2.3\}$ не расслаивается на циклические системы.

3. Имеет место следующая теорема. Теорема. Если комплекс окружностей $\{2.3\}$ расслаивается на однопараметрическое семейство конгруэнций $\omega = 0$, окружности которых образуют циклические системы, то:

1) либо одно из семейств каналовых поверхностей этого комплекса является семейством трубчатых поверхностей;

2) либо радиус окружности такого комплекса есть среднее пропорциональное между расстояниями от центра окружности до центров его фокальных сфер.

Доказательство. Комплекс окружностей $\{2.3\}$ обладает двумя, в общем случае различными семействами каналовых поверхностей [5]. Система дифференциальных уравнений для нахождения семейств каналовых поверхностей и абсцисс ρ центров фокальных сфер [6] комплекса $\{2.3\}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &(\Gamma_{11} - \rho)\,\omega_3^1 + \Gamma_{12}\omega_3^2 + \Gamma_{10}\Theta^0 = 0, \\ &\Gamma_{21}\omega_3^1 + (\Gamma_{22} - \rho)\,\omega_3^2 = 0, \\ &\rho\,(\Gamma_{01}^3\omega_3^1 + \Gamma_{02}^3\omega_3^2) - \Theta^0 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Абсциссы ρ центров фокальных сфер этого комплекса определяются из уравнения

$$(\Gamma_{10}\Gamma_{01}^{3}-1)\rho^{2}+[\Gamma_{11}+\Gamma_{22}+\Gamma_{10}(\Gamma_{02}^{3}\Gamma_{21}-\Gamma_{01}^{3}\Gamma_{22})]\rho+\Gamma_{12}\Gamma_{21}-\Gamma_{11}\Gamma_{22}=0. \tag{11}$$

Если условие сформулированной теоремы выполняется, то система уравнений (9) должна иметь решения, отличные от нулевого. Из условия

$$\det\begin{vmatrix} \Gamma_{12} & -\Gamma_{11} & R^{2}\Gamma_{02}^{3} \\ \Gamma_{22} & -\Gamma_{21} & -R^{2}\Gamma_{01}^{3} \\ -\Gamma_{10}\Gamma_{22} & \Gamma_{10}\Gamma_{21} & R^{2}+\Gamma_{11}\Gamma_{22}-\Gamma_{12}\Gamma_{21} \end{vmatrix}=0 \tag{12}$$

следует, что либо

$$\Gamma_{11}\Gamma_{22}-\Gamma_{12}\Gamma_{21}=0, \tag{13}$$

либо

$$R^{2}(1-\Gamma_{10}\Gamma_{01}^{3})+\Gamma_{11}\Gamma_{22}-\Gamma_{12}\Gamma_{21}=0. \tag{14}$$

Пусть имеет место условие (13). Тогда из (11) следует, что один из центров фокальных сфер комплекса совпадает с центром окружности комплекса. Подставляя значение $\rho=0$ в (10), убеждаемся, что семейство каналовых поверхностей, огибающее эту сферу, определяется уравнениями

$$\Gamma_{11}\omega_{3}^{1}+\Gamma_{12}\omega_{3}^{2}=0, \quad \Theta^{0}=0. \tag{15}$$

Так как $\Theta^{0}\equiv -RdR$, то (15) является семейством трубчатых поверхностей.

Пусть теперь выполняется условие (14). Тогда уравнение (11) можно представить в виде

$$\rho^{2}+\frac{\Gamma_{11}+\Gamma_{22}+\Gamma_{10}(\Gamma_{02}^{3}\Gamma_{21}-\Gamma_{01}^{3}\Gamma_{22})}{\Gamma_{10}\Gamma_{01}^{3}-1}\rho-R^{2}=0. \tag{16}$$

Из (16) следует, что $|\rho_{1}||\rho_{2}|=R^{2}$, то есть справедливо второе из утверждений теоремы.

Заметим, что если условия (13) и (14) выполняются одновременно, то, как следует из (11), при $R\neq 0$ среди каналовых поверхностей комплекса {2.3} имеются вырожденные.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Р. Вайтруб. Вырожденные конгруэнции и комплексы окружностей в трехмерном евклидовом пространстве. Депонировано ВИНИТИ, регистрационный номер 1231—69 Деп.

2. В. С. Малаховский. Комплексы кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Труды Томского университета. Т. 176, сер. механико-математическая, 1964, стр. 28—36.

3. С. П. Фиников. Теория конгруэнций. М.—Л., 1950.

4. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.—Л., 1948.

5. М. Р. Вайнтруб. О каналовых поверхностях комплексов окружностей {h, 3}. Материалы к научной конференции преподавателей математических кафедр педагогических институтов Сибири. Новокузнецк, 1969, стр. 80.

6. Р. М. Гейдельман. К теории трехпараметрического комплекса окружностей. ДАН СССР, № 2, 1954, стр. 201—204.