

РАССЛОЕНИЕ КОМПЛЕКСОВ {2. 3} НА ЦИКЛИЧЕСКИЕ  
СИСТЕМЫ

М. Р. ВАЙНТРУБ

(Представлена кафедрой высшей математики)

Общие комплексы окружностей в трехмерном евклидовом пространстве принадлежат трехпараметрическому семейству плоскостей. Однако представляет интерес рассмотрение таких комплексов, плоскости окружностей которых образуют семейства меньшей размерности по сравнению с размерностью самого многообразия окружностей. Такие комплексы окружностей рассматривались в [1] и были названы вырожденными. В трехмерном проективном пространстве вырожденные комплексы коник изучались в [2].

В данной работе в трехмерном евклидовом пространстве рассматриваются комплексы {2.3} (комплексы окружностей, плоскости которых образуют двухпараметрическое семейство), расслаивающиеся на циклические системы ([3], стр. 107). Устанавливаются некоторые свойства таких комплексов.

1. Замкнутая система дифференциальных уравнений комплекса {2.3}, с каждой окружностью

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - R^2 = 0, \quad x^3 = 0 \quad (1)$$

которого ассоциируется локальный канонический репер  $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ , [1], может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Gamma_{1i} \omega_3^i + \Gamma_{10} \Theta^0, \\ \omega_2 &= \Gamma_{2i} \omega_3^i, \quad \omega^3 = \Gamma_{0i}^3 \omega_3^i, \\ \omega_1^2 &= \Gamma_0 \Theta^0 + \Gamma_i \omega_3^i, \\ [\Delta \Gamma_{1i} \omega_3^i] + [\Delta \Gamma_{10} \Theta^0] &= 0, \\ [\Delta \Gamma_{2i} \omega_3^i] &= 0, \quad [\Delta \Gamma_{0i}^3 \omega_3^i] = 0, \\ [\Delta \Gamma_0 \Theta^0] + [\Delta \Gamma_i \omega_3^i] &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Gamma_{10} > 0$  вследствие ориентации вектора  $\bar{e}_1$  репера,  $\Theta^0 = -RdF$ ,  $\omega^i \equiv \omega_i$  и  $(i, j, \kappa = 1, 2; \text{ по } \kappa - \text{ не суммировать!})$

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_{0i}^3 &= d\Gamma_{0i}^3 - \Gamma_{0\kappa}^3 \omega_i^\kappa + \omega_i, \\ \Delta \Gamma_{11} &= d\Gamma_{11} - \Gamma_{12} \omega_1^2 + \Gamma_1 \omega^2 - \omega^3, \quad \Delta \Gamma_0 = d\Gamma_0, \\ \Delta \Gamma_{12} &= d\Gamma_{12} - \Gamma_{11} \omega_1^2 + \Gamma_2 \omega^2, \quad \Delta \Gamma_1 = d\Gamma_1 - \Gamma_2 \omega_1^2, \\ \Delta \Gamma_{10} &= d\Gamma_{10} + \Gamma_0 \omega^2, \quad \Delta \Gamma_2 = d\Gamma_2 - \Gamma_1 \omega_1^2 + \omega_3^1, \\ \Delta \Gamma_{21} &= d\Gamma_{21} - \Gamma_{22} \omega_1^2 - \Gamma_1 \omega^1 + \Gamma_0 \Gamma_{11} \Theta^0, \\ \Delta \Gamma_{22} &= d\Gamma_{22} - \Gamma_{21} \omega_1^2 - \Gamma_2 \omega^1 + \Gamma_0 \Gamma_{12} \Theta^0 - \omega^3. \end{aligned} \quad (3)$$

Предполагается, что формы Пфаффа  $\omega^\alpha$ ,  $\omega^\beta$ , ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) удовлетворяют условиям кососимметричности и структурным уравнениям Картана ([4], стр., 137—138).

Комплекс {2.3} расслаивается на  $\infty^1$  конгруэнций

$$\omega \equiv a\omega_3^1 + b\omega_3^2 + c\Theta^0 = 0, \quad (4)$$

если уравнение (4) вполне интегрируемо, то есть

$$[D\omega, \omega] = 0. \quad (5)$$

Полагая

$$\begin{aligned} da &= a_i\omega_3^i + a_3\Theta^0, \\ db &= b_i\omega_3^i + b_3\Theta^0, \\ dc &= c_i\omega_3^i + c_3\Theta^0, \end{aligned} \quad (6)$$

из (5) получаем условие

$$\begin{aligned} (b_3 - c_2 + a\Gamma_0)a - (a_3 - c_1 - b\Gamma_0)b - \\ - (b_1 - a_2 + a\Gamma_1 + b\Gamma_2)c = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

расслоения комплекса {2.3} на конгруэнции (4).

2. Окружности голономной конгруэнции  $\omega = 0$  комплекса {2.3} образуют циклическую систему, если эта конгруэнция допускает  $\infty^1$  поверхностей, ортогональных ко всем ее окружностям. Рассуждая известным способом ([3], стр. 107—108), получаем:

$$\begin{aligned} R^2[\omega^3\omega_3^1] + [\Theta^0\omega^1] &\equiv 0 \pmod{\omega}, \\ R^2[\omega^3\omega_3^2] + (\Theta^0\omega^2) &\equiv 0 \pmod{\omega}, \\ R^2[\omega_3^1\omega_3^2] + [\omega^1\omega^2] &\equiv 0 \pmod{\omega}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) с учетом системы дифференциальных уравнений (2) следует, что

$$\begin{aligned} a\Gamma_{12} - b\Gamma_{11} + cR^2\Gamma_{02}^3 &= 0, \\ a\Gamma_{22} - b\Gamma_{21} - cR^2\Gamma_{01}^3 &= 0, \\ a\Gamma_{10}\Gamma_{22} - b\Gamma_{10}\Gamma_{21} - c(R^2 + \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21}) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Анализ уравнений (7) и (9) показывает, что произвольный комплекс {2.3} не расслаивается на циклические системы.

3. Имеет место следующая теорема. Теорема. Если комплекс окружностей {2.3} расслаивается на однопараметрическое семейство конгруэнций  $\omega = 0$ , окружности которых образуют циклические системы, то:

- 1) либо одно из семейств каналовых поверхностей этого комплекса является семейством трубчатых поверхностей;
- 2) либо радиус окружности такого комплекса есть среднее пропорциональное между расстояниями от центра окружности до центров его фокальных сфер.

Доказательство. Комплекс окружностей {2.3} обладает двумя, в общем случае различными семействами каналовых поверхностей [5]. Система дифференциальных уравнений для нахождения семейств каналовых поверхностей и абсцисс  $\rho$  центров фокальных сфер [6] комплекса {2.3} имеет вид:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11} - \rho)\omega_3^1 + \Gamma_{12}\omega_3^2 + \Gamma_{10}\Theta^0 &= 0, \\ \Gamma_{21}\omega_3^1 + (\Gamma_{22} - \rho)\omega_3^2 &= 0, \\ \rho(\Gamma_{01}^3\omega_3^1 + \Gamma_{02}^3\omega_3^2) - \Theta^0 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Абсциссы  $\rho$  центров фокальных сфер этого комплекса определяются из уравнения

$$(\Gamma_{10}\Gamma_{01}^3 - 1)\rho^2 + [\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + \Gamma_{10}(\Gamma_{02}^3\Gamma_{21} - \Gamma_{01}^3\Gamma_{22})]\rho + \Gamma_{12}\Gamma_{21} - \Gamma_{11}\Gamma_{22} = 0. \quad (11)$$

Если условие сформулированной теоремы выполняется, то система уравнений (9) должна иметь решения, отличные от нулевого. Из условия

$$\det \begin{vmatrix} \Gamma_{12} & -\Gamma_{11} & R^2\Gamma_{02}^3 \\ \Gamma_{22} & -\Gamma_{21} & -R^2\Gamma_{01}^3 \\ -\Gamma_{10}\Gamma_{22} & \Gamma_{10}\Gamma_{21} & R^2 + \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

следует, что либо

$$\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21} = 0, \quad (13)$$

либо

$$R^2(1 - \Gamma_{10}\Gamma_{01}^3) + \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21} = 0. \quad (14)$$

Пусть имеет место условие (13). Тогда из (11) следует, что один из центров фокальных сфер комплекса совпадает с центром окружности комплекса. Подставляя значение  $\rho = 0$  в (10), убеждаемся, что семейство канальных поверхностей, огибающее эту сферу, определяется уравнениями

$$\Gamma_{11}\omega_3^1 + \Gamma_{12}\omega_3^2 = 0, \quad \Theta^0 = 0. \quad (15)$$

Так как  $\Theta^0 \equiv -RdR$ , то (15) является семейством трубчатых поверхностей.

Пусть теперь выполняется условие (14). Тогда уравнение (11) можно представить в виде

$$\rho^2 + \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + \Gamma_{10}(\Gamma_{02}^3\Gamma_{21} - \Gamma_{01}^3\Gamma_{22})}{\Gamma_{10}\Gamma_{01}^3 - 1}\rho - R^2 = 0. \quad (16)$$

Из (16) следует, что  $|\rho_1||\rho_2| = R^2$ , то есть справедливо второе из утверждений теоремы.

Заметим, что если условия (13) и (14) выполняются одновременно, то, как следует из (11), при  $R \neq 0$  среди канальных поверхностей комплекса {2.3} имеются вырожденные.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Р. Вайтруб. Вырожденные конгруэнции и комплексы окружностей в трехмерном евклидовом пространстве. Депонировано ВИНТИ, регистрационный номер 1231—69 Деп.
2. В. С. Малаховский. Комплексы кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Труды Томского университета. Т. 176, сер. механико-математическая, 1964, стр. 28—36.
3. С. П. Фиников. Теория конгруэнций. М.—Л., 1950.
4. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.—Л., 1948.
5. М. Р. Вайтруб. О канальных поверхностях комплексов окружностей {h, 3}. Материалы к научной конференции преподавателей математических кафедр педагогических институтов Сибири. Новокузнецк, 1969, стр. 80.
6. Р. М. Гейдельман. К теории трехпараметрического комплекса окружностей. ДАН СССР, № 2, 1954, стр. 201—204.