ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 118 1963

ГЛАВНЫЕ ВИДЫ УСЛОВИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ПОВЕРХНОСТНЫХ ЛУЧЕВЫХ СЕТЯХ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлено научным семинаром кафедр маркшейдерского дела и геодезии)

В настоящей статье будут рассмотрены с необходимой полнотой главные виды тех первообразных соотношений связи в поверхностных лучевых сетях, которые используются в качестве исходных при смешанном и прямом уравнивании этих сетей [2].

§ 1. Основные и дополнительные сетевые условия, их сущность и выражение

Дальнейшее исследование показывает, что в поверхностных лучевых сетях общего строения могут иметь место следующие четыре основных вида смешанных первообразных соотношений (1):

1) лучевые 3) вершинные
2) боковые 4) дополнительные.

Соотношения связи первых трех видов возникают в лучевых сетях любого строения, если только состав их исходных данных является расширенным. Поэтому указанные соотношения мы будем называть *основными*.

Что касается *дополнительных* соотношений связи, то они возникают лишь в лучевых сетях рода $s>0$ [1]. Дополнительные соотношения имеют ту замечательную особенность, что они появляются в лучевых сетях рода $s>0$ не только при расширенном составе исходных данных, но даже и тогда, когда исходные данные в этих сетях являются строго необходимыми.

Путем соответствующего преобразования, указанного в [2], смешанные соотношения связи (1) превращаются в прямые соотношения (3), которые не содержат дополнительных данных $\bar{\nu}_g$. Отсюда следует, что прямые соотношения (3) распадаются лишь на три первых вида: 1) лучевые, 2) боковые, 3) вершинные.

Согласно установившемуся обычаю, мы будем в дальнейшем первообразные соотношения связи (1) — (4) называть более кратко *сетевыми условиями*, соответственно — смешанными или прямыми.

Не рассматривая пока более подробно указанных выше 4 главных видов сетевых условий, выясним сперва причину возникновения этих условий в поверхностных лучевых сетях.

На ряде частных примеров нетрудно подметить, что такой причиной является наличие в поверхностной лучевой сети *неоднознач-*

ных частиц $\breve{P}$ — лучей $\breve{Л}_{км}$, боков $\breve{Б}_{км}$ или вершин $\breve{K}$. Эти неоднозначные сетевые частицы $\breve{P}$ имеют ту особенность, что для каждой из них может быть установлено по крайней мере 2 значения:

1) $\dot{P}$ — принятое нами,

2) $\ddot{P}$ — полученное передачей вдоль сети по необходимым исходным и дополнительным данным, отправляясь от некоторой источной сетевой частицы $\dot{И}$ той же природы, что и $\dot{P}$.

Неоднозначную сетевую частицу $\breve{P}$ будем называть в дальнейшем расщепленной, а указанные выше два ее значения $\dot{P}$ и $\ddot{P}$ назовем соответственно опорным и построенным. Рассмотрим эти два значения частицы $\breve{P}$ более подробно.

Нетрудно убедиться, что принятое нами опорное значение $\dot{P}$ расщепленной сетевой частицы $\breve{P}$ может быть: а) твердым $\bar{P}$, б) заданным в тесных пределах, близких к его возможному значению, в) заданным совершенно произвольно. Случай (а) имеет место при $\dot{P} \neq \dot{И}$, и тогда, очевидно, значение $\dot{И}$ должно быть также твердым: $\dot{И} = \bar{И}$. Последние же два случая возникают только при $\dot{P} = \dot{И}$, причем требование (б) желательно соблюдать для боковых, вершинных и дополнительных условий, а требование (в) вполне приемлемо для лучевых условий.

Что касается второго, построенного значения $\ddot{P}$ расщепленной сетевой частицы $\breve{P}$, то оно может быть: а) или необходимым, и тогда мы обозначим его через $\tilde{P}$, б) или избыточным, и в таком случае мы обозначим его через $\mathring{P}$. Заметим, что необходимым $\tilde{P}$ является значение $\ddot{P}$ только в дополнительных условиях, и там $\breve{P}$ будет представлять собой расщепленную вершину $\breve{K}$ для связанного с ней остаточного луча $\sigma\, \tilde{Л}_{пк}$ (см. § 2).

Каждая пара соответственных значений $\dot{P}$, $\ddot{P}$ расщепленной сетевой частицы $\breve{P}$ дает одно какое-нибудь сетевое условие. В зависимости от природы взятой сетевой частицы это может быть или лучевое, или боковое, или вершинное, или одно из дополнительных условий.

Что касается сущности перечисленных выше 4 главных видов сетевых условий, то каждое из них заключается в требовании, чтобы для уравненной (внутренне согласованной) лучевой сети соответствующие значения $\dot{\bar{P}}$ и $\ddot{\bar{P}}$ расщепленной сетевой частицы $\breve{P}$ совпадали бы между собой. Значит, это требование можно выразить следующим кратким равенством

$$\ddot{\bar{P}} - \dot{\bar{P}} = 0. \tag{13}$$

Допустим теперь, что в условие (13) вместо уравненных, согласованных значений $\dot{\bar{P}}$, $\ddot{\bar{P}}$ расщепленной сетевой частицы $\breve{P}$, мы вставим соответственно ее неуравненные (взаимно не согласованные) значения $\dot{P}$ и $\ddot{P}$, полученные указанным выше путем. Тогда, вследствие ошибочности необходимых исходных и дополнительных данных, условие

(13) внесенными в него значениями $\dot{P}$ и $\ddot{P}$ строго удовлетворяться не будет. Поэтому вместо (13) в таком случае окажется

$$\ddot{P} - \dot{P} = w_p \neq 0, \tag{13a}$$

где w_p есть невязка соответствующего сетевого условия.

В зависимости от того, являются ли $\dot{И}$ и $\dot{P}$ различными сетевыми частицами одной и той же природы, или же эти частицы совпадают между собой, мы будем различать внешние и внутренние условия в лучевой сети.

Если $\dot{И}$ не совпадает с $\dot{P}$:

$$\dot{И} \neq \dot{P}, \tag{14}$$

и, следовательно, $\dot{И}$, $\dot{P}$ являются обязательно твердыми $\bar{И}$, $\bar{P}$, то такое условие назовем внешним.

Если же $\dot{И}$ и $\dot{P}$ — одна и та же сетевая частица:

$$\dot{И} = \dot{P}, \tag{14a}$$

то соответствующее сетевое условие будем называть внутренним.

Разбиение условий в поверхностных лучевых сетях на внешние и внутренние является существенным. Это следует из того, что на образование невязок w_p внутренних условий влияют лишь ошибки наблюденных ζ_i и приближенных дополнительных $\nu_g^{(0)}$ величин[1]), на невязках же w_p внешних условий отражаются также ошибки в принятых положениях $\dot{И}$ и $\dot{P}$ источной и конечной расщепленной сетевых частиц.

Данное здесь обобщенное представление об условиях, возникающих в поверхностных лучевых сетях, мы разовьем далее более подробно, рассмотрев во всех существенных чертах перечисленные выше главные виды таких условий. Это рассмотрение начнем с условий последнего вида — дополнительных, которые, несмотря на свои необычные свойства, никем до сих пор замечены не были.

§ 2. Дополнительные условия

Как указывалось выше, дополнительные условия возникают в поверхностной лучевой сети рода s при любом составе ее исходных данных (расширенном или необходимом), если только род сети $s > 0$. Этим своим свойством дополнительные условия резко отличаются от основных условий, которые могут появляться в любой лучевой сети (т. е. при $s \geqslant 0$), но лишь при расширенном составе исходных данных.

Дополнительные условия поверхностной лучевой сети рода s заключаются в требовании, чтобы каждый из ее s остаточных лучей $\delta\tilde{Л}_{пк}$ (или $\delta\tilde{\bar{Л}}_{пк}$), построенных по необходимым исходным и дополнительным данным (или по необходимым уравненным данным), прошел бы совершенно точно через заданное положение $\dot{K}(\dot{\bar{K}})$ соответствующей расщепленной вершины $\breve{K}$. Например, в ненаправленной

[1]) Если приближенные значения $\nu_g^{(0)}$ дополнительных данных согласованы с соответствующей необходимой совокупностью исходных данных ζ_i, $\bar{\chi}_\mu$, то на невязки w_p внутренних условий будут влиять только ошибки наблюденных величин ζ_i

лучевой сети рода $s=3$, изображенной на рис. 1, три остаточных луча $\delta\tilde{Л}_{5\cdot\overline{18}}$, $\delta\tilde{Л}_{9\cdot\overline{19}}$ и $\delta\tilde{Л}_{8\cdot\overline{20}}$ должны пройти непосредственно через принадлежащие им твердые вершины $\overline{18}$, $\overline{19}$ и $\overline{20}$. Отсюда следует, что в поверхностной лучевой рода s возникает ровно s дополнительных условий.

Дополнительные условия лучевой сети рода s можно выразить также несколько иначе, если учесть, что на каждом построенном остаточном луче $\delta\tilde{Л}_{nк}$ (или $\delta\tilde{\bar{Л}}_{nк}$) находится второе, полученное передачей вдоль сети положение $\tilde{K}_n\,(\tilde{\bar{K}}_n)$ соответствующей расщепленной

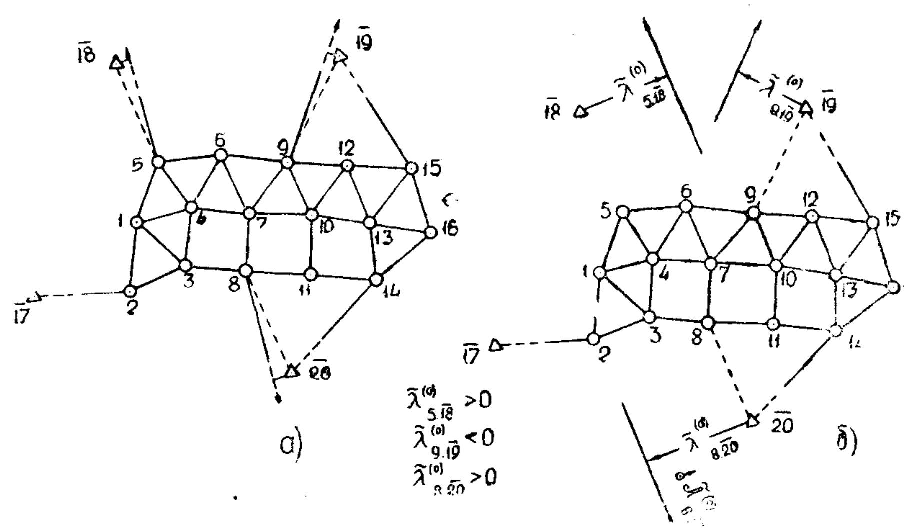

Рис. 1. Примеры невыполнения дополнительных условий.

вершины K (первое положение $\dot{K}\,(\dot{\bar{K}})$ задано). Ввиду неопределенности расположения указанной точки $\tilde{K}_n\,(\tilde{\bar{K}}_n)$ на луче $\delta\tilde{Л}_{nк}\,(\delta\tilde{\bar{Л}}_{nк})$ ничто не мешает нам считать эту точку лежащей в основании поперечника, опущенного из точки $\dot{K}\,(\dot{\bar{K}})$ на луч $\delta\tilde{Л}_{nк}\,(\delta\tilde{\bar{Л}}_{nк})$. Обозначая тогда через $\uparrow\tilde{\lambda}_{nк}\,(\uparrow\tilde{\bar{\lambda}}_{nк})$ направленный отрезок — стрелку $\dot{K}\tilde{K}_n\,(\dot{\bar{K}}\tilde{\bar{K}}_n)$, т. е. поперечное смещение луча $\delta\tilde{Л}_{nк}\,(\delta\tilde{\bar{Л}}_{nк})$ относительно точки $\dot{K}\,(\dot{\bar{K}})$, мы можем записать дополнительные условия следующим кратким образом:

а) при построении лучевой сети по необходимым исходным данным

$$\tilde{K}_n-\dot{K}=\uparrow\tilde{\lambda}_{nк}=0. \qquad (15')$$

б) при построении лучевой сети по расширенным исходным данным

$$\tilde{\bar{K}}_n-\dot{\bar{K}}=\uparrow\tilde{\bar{\lambda}}_{nк}=0. \qquad (15)$$

Рассмотрим теперь более подробно вопрос о написании дополнительных условий в обоих указанных случаях, а также разберем способы составления этих условий.

1. Предположим сперва, что совокупность исходных данных $\zeta_i, \bar{\chi}_\mu$ в поверхностной лучевой сети s-го рода является необходимой σ

$$\sigma=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_\varkappa;\ \bar{\chi}_1\bar{\chi}_2,\ldots,\bar{\chi}_\rho) \qquad (16)$$

и потому связка $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\varkappa$ в (16) должна удовлетворять указанному в [1] необходимому условию построимости лучевой сети. Тогда в такой сети при $s>0$ возникает s смешанных соотношений связи (1) следующего частного вида:

$$Д_{пк}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s; \sigma') = Д_{пк}(\sigma'') = \tilde{\lambda}_{пк} = 0. \qquad (15°)$$

Здесь σ' получается из σ выбрасыванием s угловых величин ζ_h, задающих направления s остаточных лучей $\mathcal{J}\ \tilde{Л}_{пк}$. Что касается σ'', то

$$\sigma'' = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s; \sigma'). \qquad (16.a)$$

Кроме того:

ν_g — те s дополнительных данных лучевой сети рода s, о которых говорилось в [1];

ζ_i — наблюденные угловые величины, направления β_j или углы γ_k;

χ_μ — твердые величины;

$\tilde{\lambda}_{пк}$ — направленная длина соответствующей стрелки $\uparrow \tilde{\lambda}_{пк}$.

Существенно заметить при этом, что входящие в (15°) значения ν_g дополнительных данных считаются строго согласованными с соответствующей совокупностью σ необходимых исходных данных [равенство (16)].

Замена в условии (15°) согласованных с σ дополнительных данных ν_g их приближенными значениями $\nu_g^{(0)}$ приводит к нарушению указанного условия и замене лучей $\mathcal{J}\ \tilde{Л}_{пк}$ смещенными остаточными лучами $\mathcal{J}\ \tilde{Л}^{(0)}_{пк}$. В этом случае вместо (15°) будем иметь

$$Д_{пк}(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \ldots, \nu_s^{(0)}; \sigma') = \tilde{\lambda}^{(0)}_{пк} = w_{Д_{пк}} \neq 0, \qquad (15°.a)$$

где $w_{Д_{пк}}$ есть невязка условия (15°) (см. рис. 1 б, на котором невязки $w_{Д_{пк}} = \tilde{\lambda}^{(0)}_{пк}$ изображены в действительную величину). Знак невязки $w_{Д_{пк}} = \tilde{\lambda}^{(0)}_{пк}$ установим в соответствии с правилом, указанным в [1]:

$$(17)\quad \begin{cases} \tilde{\lambda}^{(0)}_{пк} > 0, & \text{если луч } \mathcal{J}\ \tilde{Л}^{(0)}_{пк} \text{ правее точки } \dot{K} \\ \tilde{\lambda}^{(0)}_{пк} < 0, & \text{если луч } \mathcal{J}\ \tilde{Л}^{(0)}_{пк} \text{ левее точки } \dot{K} \end{cases}$$

Совместное устранение всех s невязок $w_{Д_{пк}}$ в лучевой сети производится для данного случая общим способом, изложенным в [1].

2. Допустим теперь, что совокупность исходных данных в поверхностной лучевой сети рода s является расширенной Σ. Тогда в такой сети кроме ряда основных условий (лучевых, боковых или вершинных) возникает еще s дополнительных условий вида, близкого к (15°)

$$Д_{пк}(\bar{\sigma}'') = Д_{пк}(\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots, \bar{\nu}_s; \sigma') = \tilde{\bar{\lambda}}_{пк} = 0, \qquad (15)$$

где верхней чертой обозначены уравненные величины. Эти дополнительные соотношения выражают требование, чтобы равнялись 0 поперечные смещения $\tilde{\bar{\lambda}}_{пк}$ всех s остаточных лучей $\mathcal{J}\ \tilde{\bar{Л}}_{пк}$, построенных по какой-нибудь необходимой совокупности σ'' уравненных $\bar{\nu}_g$, $\bar{\zeta}_i$ и твердых $\bar{\chi}_\mu$ расширенных исходных данных, причем неуравненное σ'' определяется согласно (16*а*).

Для неуравненных расширенных исходных данных условия (15) будут удовлетворяться с любой степенью точности, если принятые значения ν_g дополнительных данных согласованы достаточно строго с соответствующей совокупностью σ необходимых исходных данных ζ_i, $\bar{\chi}_\mu$ [см. (16)]. В таком случае вместо (15) будем иметь

$$Д_{пк}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_z; \sigma') = \tilde{\lambda}_{пк} = w_{Д_{пк}} \approx 0, \tag{15a}$$

где $w_{Д_{пк}}$ есть невязка рассматриваемого дополнительного условия.

Устранение невязок $w_{Д_{пк}}$ всех s дополнительных условий в лучевой сети s-го рода производится для данного случая совместно с невязками основных условий этой сети.

3. Написание дополнительных условий (15°) или (15) в развернутом виде может быть сделано следующим образом.

а) Сначала выбираем подходящую необходимую совокупность $\sigma'' = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s; \sigma')$ исходных $\zeta_i, \bar{\chi}_\mu$ и дополнительных ν_g данных. Далее составляем развернутые буквенные выражения через ν_g, ζ_i, $\bar{\chi}_\mu$ длин $d_{сн}$ связывающих сторон $СН$ в цепи ячеек, соединяющей исходные вершины $\dot{A}, \dot{B}$ с соответствующей расщепленной вершиной $\breve{K}_\partial$ ($\partial = 1, 2, \ldots, s$). Затем, пользуясь найденными буквенными представлениями длин $d_{сн}$ и направленностями $\uparrow_{сн}$[2]) связывающих сторон $СН$ в рассматриваемой цепи ячеек, выражаем последовательно в общем виде положения всех определяемых вершин $С, Н$ этой цепи, включая примычную определяемую вершину $П_\partial$. В заключение пишем искомое развернутое общее выражение для поперечного смещения $\tilde{\lambda}_{(пк)_\partial}$ остаточного луча $\delta\tilde{Л}_{(пк)_\partial}$ относительно опорного положения $\dot{K}_\partial$ соответствующей расщепленной вершины $\breve{K}_\partial$. Задача решена.

б) В отличие от (*а*), с помощью последовательных прямых засечек сразу составляем развернутое буквенное выражение для построенных положений всех определяемых вершин $С, Н$ в соединительной цепи ячеек от $\dot{A}, \dot{B}$ до $\breve{K}_\partial$. Остальное, как в (*а*). Этот способ удобен только для плоских лучевых сетей.

Степень сложности развернутых выражений (15°) или (15) для дополнительных условий зависит от вида ячеек соединительной цепи — треугольных или смешанных. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже для вершинных условий, имеющих много общего с дополнительными условиями.

4. Отметим еще одну замечательную особенность дополнительных условий в поверхностных лучевых сетях. Именно, из [1] и равенств (15°*а*), (15*а*) следует, что невязки $w_{Д_{пк}}$ этих условий суть всегда направленные длины $\tilde{\lambda}_{(пк)_\partial}$ некоторых стрелок $\uparrow\tilde{\lambda}_{(пк)_\partial}$—поперечных смещений построенных остаточных лучей $\delta\tilde{Л}_{(пк)_\partial}$. Между тем соответствующие дополнительные данные ν_g могут быть при этом не

---

[2]) Направленность $\uparrow_{сн}$ какого-нибудь луча $\uparrow Л_{сн}$ есть угол, образуемый этим лучом с первой осью $\uparrow U^1$ принятой отсчетной опоры.

только отрезками, но и угловой величиной. В противоположность сказанному, такого разнобоя никогда не бывает в основных условиях. Там всегда невязки угловых условий суть угловые величины, невязки боковых и вершинных условий—длинновые величины.

§ 3. Лучевые условия

Обратимся теперь к **основным** сетевым условиям и среди них рассмотрим в первую очередь условия лучевые, как наиболее простые по своему строению.

Лучевые условия связывают в поверхностной лучевой сети s-го рода только угловые величины, определяющие положение ее лучей $Л_{сн}$ на подстилающей поверхности. Эти условия возникают в лучевой сети при наличии в ней расщепленных лучей ♂$\breve{Л}_{км}$. Для таких лучей всегда могут быть установлены по крайней мере два положения: 1) ♂$\dot{Л}_{км}$—опорное, принятое нами; 2) ♂$\mathring{Л}_{км}$—построенное полученное передачей вдоль сети по необходимым исходным данным от некоторого луча ♂$\dot{Л}_{ab}$, взятого в качестве источного.

Каждое из лучевых условий выражает требование, чтобы после уравнивания направленности $\dot{\overline{\uparrow}}_{км}$ и $\mathring{\overline{\uparrow}}_{км}$ двух указанных выше положений ♂$\dot{\overline{Л}}_{км}$ и ♂$\mathring{\overline{Л}}_{км}$ данного расщепленного луча ♂$\breve{Л}_{км}$ оказались бы равными между собой. Иначе говоря, любое лучевое условие может быть кратко записано так

$$\mathring{\overline{\uparrow}}_{км} - \dot{\overline{\uparrow}}_{км} = 0. \qquad (18)$$

Чтобы представить далее это условие в более развернутом виде, предположим, что в уравненной сети передача направленности от источного луча ♂$\dot{\overline{Л}}_{ab}$ к построенному лучу ♂$\mathring{\overline{Л}}_{км}$ производится по ходу, в котором начало последующей стрелки совмещено с концом предшествующей стрелки (рис. 2). Тогда всякое f-ое угловое условие в лучевой сети запишется в следующем развернутом виде:

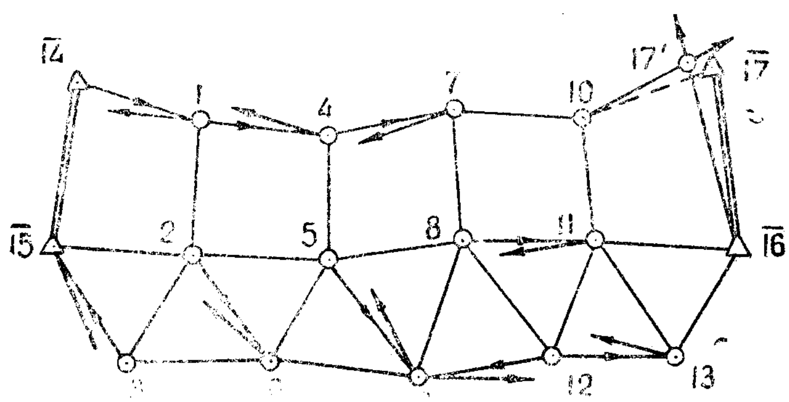

Рис. 2. Примеры невыполнения лучевых условий.

$$\uparrow_{ab} + \sum_{e=1}^{n} \eta_{f.e}(\gamma_e \pm 180^\circ) + i\cdot 360^\circ - \dot{\overline{\uparrow}}_{км} = 0 \qquad (18^\circ)$$

Здесь:

а) γ_e — уравненные углы лучевой сети, числом n, полученные непосредственно или через уравненные направления β_i, β_k;

б) $\eta_{f.e}$ — коэффициенты, равные ± 1 или 0 в зависимости от того, входит или нет угол $\overline{\gamma}_e$ в данное f-ое лучевое условие ($\eta_{f.e} = +1$ для левых и $\eta_{f.e} = -1$ для правых по ходу углов $\overline{\gamma}_e$);

в) i — целое число, которое подбирается так, чтобы удовлетворить соотношению

$$360^\circ \geqslant \left[\sum_{e=1}^{n} \eta_{f.e}\,(\overline{\gamma}_e \pm 180^\circ) + i\cdot 360^\circ\right] \geqslant 0; \qquad (*)$$

г) знак $\pm$ берем по произволу.

Вследствие ошибок наблюдений и возможной ошибочности принятых положений $♂\,\dot{Л}_{ab}$, $♂\,\dot{Л}_{км}$ для источного и конечного лучей, в неуравненной сети лучевые условия (18) или (18°) строго удовлетворяться не будут. Взамен этих равенств мы будем иметь тогда

$$\mathring{\uparrow}_{км} - \dot{\uparrow}_{км} = \dot{\uparrow}_{ab} + \sum_{e=1}^{n} \eta_{f.e}\,(\gamma_e \pm 180^\circ) + i\cdot 360^\circ - \dot{\uparrow}_{км} = w_{Л_{км}} \neq 0.$$

Здесь $w_{Л_{км}} = w_f$ есть невязка данного f-го условия, а $\dot{\uparrow}_{ab}$ и $\dot{\uparrow}_{км}$ суть принятые нами направленности источного $♂\,\dot{Л}_{ab}$ и конечного $♂\,\dot{Л}_{км}$ лучей в передаточном ходе. При этом предполагается, конечно, что значения $\mathring{\uparrow}_{км}$ и $\overline{\mathring{\uparrow}}_{км}$ получены по одному и тому же передаточному ходу.

В общем случае источный луч $♂\,\dot{Л}_{ab}$ не совпадает с конечным опорным лучом $♂\,\dot{Л}_{км}$:

$$♂\,\dot{Л}_{ab} \neq ♂\,\dot{Л}_{км},$$

и потому в соотношении (18a) вообще $\dot{\uparrow}_{ab} \neq \dot{\uparrow}_{км}$ (см. рис. 2, где $♂\,\dot{Л}_{ab} = ♂\,Л_{\overline{15}\cdot\overline{14}}$, а $♂\,\dot{Л}_{км} = ♂\,Л_{16\cdot\overline{17}}$). В этом случае в согласии со сказанным в § 1, соответствующее угловое условие будем называть **внешним**.

Чаще, однако, бывает, что оба указанных луча $♂\,\dot{Л}_{ab}$ и $♂\,\dot{Л}_{км}$ являются одним и тем же лучом:

$$♂\,\dot{Л}_{ab} = ♂\,\dot{Л}_{км},$$

и тогда безусловно $\dot{\uparrow}_{ab} = \dot{\uparrow}_{км}$. Такой случай как раз имеет место в угловых соотношениях, возникающих в замкнутых ячейках лучевой сети (рис. 2). На этом основании лучевые условия (18°) при совпадающих лучах $♂\,\dot{Л}_{ab}$ и $♂\,\dot{Л}_{км}$ назовем **ячейковыми**, а также — **внутренними** (согласно § 1).

Из сказанного следует, что ячейковое f-ое лучевое условие и его невязка w_f запишутся следующим образом:

$$\sum_{e=1}^{n} \eta_{f.e}\,(\overline{\gamma}_e \pm 180^\circ) + i\cdot 360^\circ = 0 \qquad (18^{00})$$

$$\sum_{e=1}^{n} \eta_{f.e}(\gamma_e \pm 180^\circ) + i \cdot 360^\circ = w_f \qquad (18б)$$

Нетрудно убедиться, что лучевые условия для поверхностных лучевых сетей рода s, направленных и ненаправленных, не содержат дополнительных данных $\bar{\nu}_g$. Поэтому лучевые условия имеют один и тот же вид как при смешанном, так и при прямом уравнивании лучевых сетей.

§ 4. Боковые условия

Обратимся теперь к тем возникающим в лучевых сетях первообразным соотношениям связи вида (1) и (3), которые были названы в § 1 боковыми условиями.

Боковые условия связывают в поверхностной лучевой сети длины $\bar{d}_{сн}$ ее уравненных боков $\bar{Б}_{сн}$ и возникают при наличии в сети расщепленных боков $\breve{Б}_{км}$. Расщепленные бока $\breve{Б}_{км}$ имеют ту особенность, что для них всегда может быть установлено по крайней мере два значения: 1) $\dot{Б}_{км}$ —опорное, принято нами, 2) $\mathring{Б}_{км}$ —построенное, полученное передачей вдоль сети по необходимым исходным и дополнительным данным от некоторого бока $\dot{Б}_{ab}$, взятого в качестве источного.

Каждое из боковых условий выражает требование, чтобы после уравнивания лучевой сети длины $\dot{\bar{d}}_{км}$ и $\mathring{\bar{d}}_{км}$ соответствующих значений $\dot{Б}_{км}$ и $\mathring{Б}_{км}$ данного расщепленного бока $\breve{Б}_{км}$ совпадали бы между собой. Отсюда вытекает следующий общий вид боковых условий (иначе—условий сторон $C_{км}$) в лучевой сети:

$$\mathring{\bar{d}}_{км} - \dot{\bar{d}}_{км} = C_{км}(\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots, \bar{\nu}_s; \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_n; \dot{\bar{d}}_{ab}) - \dot{\bar{d}}_{км} = 0, \qquad (19)$$

где $\dot{\bar{d}}_{ab}$, $\dot{\bar{d}}_{км}$ — длины источного $\dot{\bar{Б}}_{ab}$ и конечного $\dot{\bar{Б}}_{км}$ боков (сторон) сети, уравненные или твердые;

$\bar{\nu}_g$ — уравненные дополнительные данные, число которых равно s в лучевой сети s-го рода;

$\bar{\gamma}_e$ — уравненные углы лучевой сети, числом n, полученные непосредственно или через пары направлений $\bar{\beta}_j$, $\bar{\beta}_k$.

Для неуравненной лучевой сети это условие вследствие ошибок наблюдений и принятых величин точно удовлетворяться не будет, и мы вместо (19) получим

$$\mathring{d}_{км} - \dot{d}_{км} = C_{км}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s; \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n; \dot{d}_{ab}) - \dot{d}_{км} = w_{C_{км}} \neq 0, \qquad (19а),$$

где ν_g суть значения дополнительных данных, согласованные с одной из необходимых совокупностей σ исходных данных [см. (16)], а $w_{C_{км}}$ есть невязка соответствующего бокового условия. Из предыдущего следует, что указанная невязка $w_{C_{км}}$ получается путем последовательного ее вычисления по цепи ячеек, связывающей источную сторону $\dot{Б}_{ab}$ с конечной стороной $\dot{Б}_{км}$ этой цепи.

В общем случае источная сторона $\dot{Б}$ не совпадает с конечной стороной $Б_{км}$:

$$\dot{Б}_{ab} \neq \dot{Б}_{км}$$

(см. рис. 3*а* и 3*б*; на рис. 3*б* бок $\dot{Б}_{ab} = Б_{\overline{14}.\overline{15}}$, а бок $\dot{Б}_{км} = Б_{\overline{16}.\overline{17}}$), и тогда мы говорим о **внешнем** боковом условии.

Однако чаще бывает, что источная $\dot{Б}_{ab}$ и конечная $\dot{Б}_{км}$ стороны совпадают между собой:

$$\dot{Б}_{ab} = \dot{Б}_{км}$$

(см. рис. 3*в*, где в качестве $\dot{Б}_{ab} = \dot{Б}_{км}$ можно взять любую связывающую сторону $Б_{сн}$ данной цепи ячеек; например, можно взять сторону $\dot{Б}_{2.3}$). В этом случае соответствующее боковое условие назовем **внутренним**.

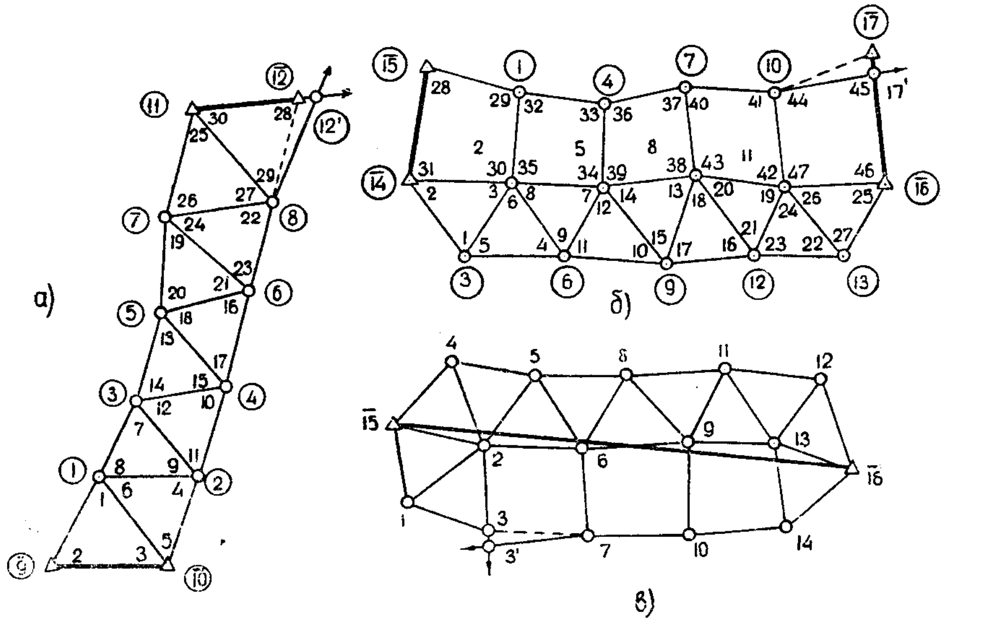

Рис. 3. Примеры невыполнения боковых условий.

§ 5. Развернутое представление боковых условий в поверхностных лучевых сетях. Трудность решения этой задачи для общего случая

Поставим далее своей целью дать развернутое выражение боковых условий в поверхностных лучевых сетях различного строения. Эта задача сводится, очевидно, к развернутому представлению функции $C_{км} = \overset{\circ}{d}_{км}$ в равенстве (19 *а*). Указанная функция $C_{км} = \overset{\circ}{d}_{км}$ получается путем ее последовательного вычисления вдоль соответствующей цепи ячеек. Поэтому нам, в первую очередь, нужно иметь общие выражения для длин $d_{сн}$ определяемых сторон $Б_{сн}$ в некоторой промежуточной ячейке сети.

Чтобы соответствующие выражения для длин $d_{сн}$ получились достаточно общими, мы будем углы γ и длины d сторон в ячейках сопровождать двумя указателями e, j: γ_{ej}, d_{ej}. При этом условимся, что первый указатель e определяет постоянное место величины γ или d в ячейке данного вида при некотором однообразном способе пересчета величин γ, d. Второй же указатель j определяет место взятой ячейки в данной цепи.

Предположим теперь, что данная лучевая сеть построена только из треугольных и четырехугольных ячеек, а способы пересчета величин γ, d в выделяемых из этой сети цепях ячеек установлены так, как это показано на рис. 4. Тогда в зависимости от рода подстилающей поверхности—плоской или сфероидической — мы будем иметь следующие выражения для длин определяемых сторон в ячейках упомянутого вида.

Подстилающая поверхность — плоскость. В таком случае

а) Если взятая j-ая ячейка цепи—треугольник (рис. 4 *а*), то вычисление длин $d_{2.j}$, $d_{3.j}$ ее неизвестных сторон *АВ*, *БВ* производится с помощью равенств

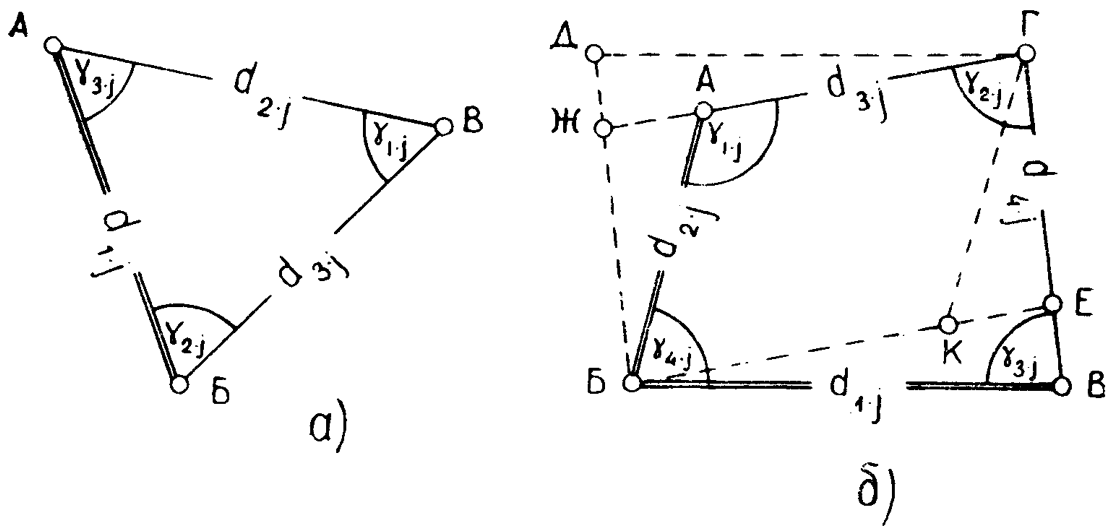

Рис. 4. Обозначение углов и сторон в треугольниках и четырехугольниках

$$d_{2j} = d_{1j} \frac{\sin \gamma_{2j}}{\sin \gamma_{1j}} \qquad d_{3j} = d_{1j} \frac{\sin \gamma_{3j}}{\sin \gamma_{1j}}, \tag{20}$$

где длина d_{1j} исходной стороны *АБ* предполагается известной: задана или найдена из вычисления предшествующей ячейки.

б) Если же данная j-ая ячейка цепи—четырехугольник (рис. 4*б*), то вычисление длин d_{3j}, d_{4j} ее неизвестных сторон *АГ*, *ВГ* производится согласно равенств

$$\begin{aligned} d_{3j} &= \operatorname{cosec} \gamma_{2j} [d_{1j} \sin \gamma_{3j} + d_{2j} \sin (\gamma_{1j} + \gamma_{2j})] \\ d_{4j} &= \operatorname{cosec} \gamma_{2j} [d_{2j} \sin \gamma_{1j} + d_{1j} \sin (\gamma_{2j} + \gamma_{3j})], \end{aligned} \tag{21}$$

где длины d_{1j}, d_{2j} исходных сторон *АБ*, *БВ* предполагаются известными: они — твердые или найдены из вычисления предшествующих ячеек. Равенства (21) указаны впервые И. В. Зубрицким [3]. Эти равенства могут быть получены на основе вспомогательных построений рис. 4*б*, где *ДГ*‖*БВ*, *ГК*‖*АБ*, *БЕ*‖*ГЖ*, *ДБ*‖*ГВ*, а точки *Ж* и *Е* лежат соответственно на сторонах *ГА*, *ГВ* или на их продолжениях.

Подстилающая поверхность—сфероид. В этом случае для определения длин сторон в поверхностных лучевых сетях производят предварительное плоское преобразование их ячеек по Лежандру.

Для сфероидических треугольных ячеек такое их преобразование общеизвестно.

Для сфероидических же четырехугольных ячеек плоское преобразование по Лежандру будет заключаться в том, что мы сначала решаем их приближенно, как плоские, пользуясь теми же равенствами (21), что и выше. Далее, разбив каждую четырехугольную ячейку засекающей укосиной (например, укосиной *БГ* на рис. 4 *б*) на два треугольника, находим по Лежандру сфероидические поправки углов в этих вспомогательных неплоских треугольниках. Тогда углы γ'_{ij} плоского четырехугольника *А'Б'В'Г'* с той же длиной сторон, что и у данного сфероидического *АБВГ*, найдутся, очевидно, так—при разбивке укосиной *БГ*:

$$\begin{aligned} &1)\ \gamma'_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_1 && 3)\ \gamma'_{3j} = \gamma_{3j} - \frac{1}{3}\varepsilon_2 \\ &2)\ \gamma'_{2j} = \gamma_{2j} - \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) && 4)\ \gamma'_{4j} = \gamma_{4j} - \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \end{aligned} \tag{22}$$

где ε_1, ε_2 суть сферические избытки вспомогательных треугольников *БАГ*, *БВГ*. Теперь, считая известными длины d_{1j}, d_{2j} двух сторон в каждом таком плоском четырехугольнике *А'Б'В'Г'*, находим согласно (21) длины d_{3j}, d_{4j} остальных двух его сторон. Задача решена.

Вид боковых условий в поверхностных лучевых сетях различного строения. Сравнение написанных выше равенств (20), (21) показывает, что выражения для определяемых сторон в четырехугольных ячейках имеют более сложный вид, чем в ячейках треугольных. Поэтому желательно выяснить, как сказывается неоднородность равенств (21) на окончательных выражениях боковых условий в лучевых сетях различного строения. При этом ради определенности мы ограничимся плоскими лучевыми сетями, так как более общий случай сфероидических лучевых сетей ничем существенным не будет отличаться от указанного.

Предположим сначала, что цепь ячеек между заданными сторонами $\dot{Б}_{ab}$ и $\dot{Б}_{км}$ лучевой сети состоит из одних треугольников (см. рис. 2 а, где $\dot{Б}_{ab} = \overline{9}\cdot\overline{10}$, $\dot{Б}_{км} = \overline{11}\cdot\overline{12}$). Тогда входящая в (19а) длина $\mathring{d}_{км}$ найденного по цепи значения $\mathring{Б}_{км}$ расщепленной стороны $\breve{Б}_{км}$ выразится через наблюденные углы γ_{1j}, γ_{2j} очень просто:

$$\mathring{d}_{км} = d_{2.n} = \bar{d}_{1.1}\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin\gamma_{2.j}}{\sin\gamma_{1.j}}, \tag{23}$$

где $\bar{d}_{1.1} = \dot{d}_{ab}$ — длина исходной стороны $\dot{Б}_{ab}$, а n — число треугольников цепи. Например, в цепи треугольников, изображенной на рис. 3а, длина $\mathring{d}_{\overline{11}.\overline{12}}$ соответствующего значения $\mathring{Б}_{\overline{11}.\overline{12}}$ расщепленной стороны $\breve{Б}_{\overline{11}.\overline{12}}$ запишется в развернутом виде следующим образом:

$$\mathring{d}_{\overline{11}.\overline{12}} = d_{\overline{9}.\overline{12}}\,\frac{\sin 2\sin 5\sin 8\sin 11\sin 14\sin 17\sin 20\sin 23\sin 26\sin 29}{\sin 1\sin 4\sin 7\sin 10\sin 13\sin 16\sin 19\sin 22\sin 25\sin 28}. \tag{a}$$

Допустим теперь, что в цепи ячеек, связывающей источную $\dot{Б}_{ab}$ и конечную расщепленную $\breve{Б}_{км}$ стороны лучевой сети, содержатся не только треугольники, но и четырехугольники (рис. 3б и 3в). Тогда из (20) и (21) следует, что в этом случае длина $\mathring{d}_{км}$ найденного по цепи значения $\mathring{Б}_{км}$ расщепленной стороны $\breve{Б}_{км}$ определится через наблюденные углы γ_{ij} выражением, состоящим из нескольких слагаемых вида (а). Например, в цепи смешанных ячеек, изображенной на черт. 3б, получим следующее выражение для вычисленной по цепи длины $\overset{\circ}{d}_{\overline{16}.\overline{17}}$ построенной конечной стороны $\overset{\circ}{Б}_{\overline{16}.\overline{17}}$, найденной по наблюденным углам γ_{ij}:

$$\begin{aligned} d_{\overline{16}.\overline{17}} &= d_{\overline{14}.\overline{15}}\ \frac{\sin 28 \sin 32 \sin 36 \sin 40 \sin 44}{\sin 29 \sin 33 \sin 37 \sin 41 \sin 45} + \\ &+ d_{\overline{14}.2}\left[\frac{\sin(29+30)\sin 32\sin 36\sin 40\sin 44}{\sin 29\sin 33\sin 37\sin 41\sin 45}+\right. \\ &+\frac{\sin 2\sin 5\sin 9\sin(33+34)\sin 36\sin 40\sin 44}{\sin 1\sin 4\sin 7\sin 33\sin 37\sin 41\sin 45}+ \\ &+\frac{\sin 2\sin 5\sin 8\sin 11\sin 15\sin(37+38)\sin 40\sin 44}{\sin 1\sin 4\sin 7\sin 10\sin 13\sin 37\sin 41\sin 45}+ \qquad (б) \\ &+\frac{\sin 2\sin 5\sin 8\sin 11\sin 14\sin 17\sin 21\sin(41+42)\sin 44}{\sin 1\sin 4\sin 7\sin 10\sin 13\sin 16\sin 19\sin 41\sin 45}+ \\ &+\left.\frac{\sin 2\sin 5\sin 8\sin 11\sin 14\sin 17\sin 20\sin 23\sin 27\sin(45+46)}{\sin 1\sin 4\sin 7\sin 10\sin 13\sin 16\sin 19\sin 22\sin 25\sin 45}\right]= \\ &= d_{\overline{14}.\overline{15}}\cdot\varphi_1 + d_{\overline{14}.2}\cdot\varphi_2. \end{aligned}$$

Здесь $d_{\overline{14}.\overline{15}}$ — длина источной стороны $Б_{\overline{14}.\overline{15}}$, $d_{\overline{14}.2}$ — дополнительное данное ν_1 рассматриваемой направленной лучевой сети 1 рода, найденное по необходимым исходным данным. Таким образом, полученное нами выражение для $\overset{\circ}{d}_{\overline{16}.\overline{17}}$ содержит твердые, наблюденные и дополнительные данные, т. е. будет иметь общий вид функции $C_{км}(\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2,.., \bar{\nu}_s; \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2,..,\bar{\gamma}_n; \dot{d}_{ab})$ в (19), если наблюденные и принятые величины заменить их уравненными значениями.

Одновременно с этим нетрудно установить, что если источная $\dot{Б}_{ab}$ и конечная $\dot{Б}_{км}$ стороны в цепи ячеек совпадают (рис. 3 в), то твердые и дополнительные данные в боковые соотношения (19) в конечном счете не входят.

Вывод. Подводя итог сказанному выше и опираясь на сравнение равенств (а) и (б), приходим к выводу, что боковые условия (19) для цепей смешанных ячеек образуются сложнее и имеют значительно более громоздкий вид, чем для цепей из одних треугольников.

§ 6. Вершинные условия

Рассмотрим, наконец, последний вид первообразных соотношений связи (1), (3) в поверхностных лучевых сетях, а именно, вершинные условия.

Вершинные условия связывают в лучевой сети отдельные совокупности ее уравненных вершин. Эти условия возникают при наличии в лучевой сети расщепленных вершин $\breve{K}$, связанных с отнаблюденными на них избыточными лучами $\overset{\circ}{Л}_{пк}$. Такие расщепленные вершины $\breve{K}$ обладают той особенностью, что для каждой из них всегда может быть установлено по крайней мере два положения: 1) $\dot{K}$ — опорное, заданное нами, 2) $\mathring{K}_n$ — построенное. При этом, в отношении второго, построенного положения $\mathring{K}_n$ расщепленной вершины $\breve{K}$ известно только, что точка $\mathring{K}_n$ лежит на избыточном луче $\delta\,\mathring{Л}_{пк}$, который получен передачей вдоль сети по необходимым исходным ς_i, $\overline{\chi}_\mu$ и дополнительным ν_g данным, отправляясь от пары каких-нибудь источных вершин $\dot{A}$, $\dot{B}$. Поэтому подобно случаю дополнительных условий мы примем за $\mathring{K}_n$ основание поперечника—стрелки $\dot{K}\mathring{K}_n = \uparrow\mathring{\lambda}_{пк}$, опущенного из $\dot{K}$ на избыточно построенный луч $\delta\,\mathring{Л}_{пк}$.

В общем случае на расщепленную вершину $\breve{K}$ может быть отнаблюдено несколько избыточных лучей $Л_{n_h к}$ с соседних определяемых вершин $П_h$. Тогда каждой паре, состоящей из опорного положения $\dot{K}$ расщепленной вершины $\breve{K}$ и построенного положения $\delta\,\mathring{Л}_{n_h к}$ для одного из этих лучей $\mathring{Л}_{n_h к}$, будет соответствовать свое вершинное условие вида, близкого к (15):

$$\overline{\mathring{K}_n} - \overline{\dot{K}} = \uparrow\overline{\mathring{\lambda}_{пк}} = 0, \tag{24}$$

где верхняя черта обозначает уравненные данные.

Сказанное можно пояснить на примере лучевой цепи, изображенной на рис. 5б. Здесь опорным положением $\dot{K}$ расщепленной вершины $\breve{K}$ является твердая вершина $\overline{12}$, а отнаблюденными на нее избыточными лучами $\mathring{Л}_{n_h к}$ будут лучи $\mathring{Л}_{14\cdot\overline{20}}$, $\mathring{Л}_{15\cdot\overline{20}}$, $\mathring{Л}_{16\cdot\overline{20}}$. Значит, в данной сети имеется 3 вершинных условия, связанных с указанной твердой вершиной $\overline{20}$.

В поверхностных лучевых сетях возможны также случаи, когда опорные положения $\dot{K}$ отдельных расщепленных вершин $\breve{K}$ являются избыточными для сети при их сочетании с одними примычными лучами $Л_{n_h к}$, а в сочетании с другими примычными лучами $Л_{n_j к}$ эти точки $\dot{K}$ приходится считать необходимыми. Такое двойственное значение имеет, например, твердая вершина $\overline{12}$ на рис. 5а, изображающем направленную лучевую сеть рода $s = 1$. Легко понять, что эта вершина $\dot{K} = \overline{12}$ является для данной сети одновременно и необходимой, и избыточной. Если мы примем луч $\delta Л_{10\cdot\overline{12}}$ за остаточный $\delta\,\tilde{Л}_{пк}$, а луч $\delta Л_{8\cdot\overline{12}}$ — в качестве избыточного $\delta\,\mathring{Л}_{пк}$, то в сочетании с первым из этих лучей вершину $\overline{12}$ нужно признать необходимой, а совместно со вторым лучем—избыточной.

Выясним теперь с у щ н о с т ь вершинных условий в поверхностных лучевых сетях.

Обозначим через Σ полную расширенную совокупность исходных данных ς_i, $\overline{\chi}_\mu$ в лучевой сети. Пусть ω есть некоторая выделенная из Σ частная совокупность исходных данных ς_i, $\overline{\chi}_\mu$, с помощью которой могут быть заданы в лучевой сети опорные положения $\dot{K}$ расщепленных вершин $\breve{K}$ и построены однозначно все избыточные лучи $\delta\mathring{Л}_{пк}$, связанные с этими вершинами $\breve{K}$. Пусть далее ω' означает совокупность данных ς_i, $\overline{\chi}_\mu$, которая получается из ω выбрасыванием s угловых величин ς_h, задающих направления всех s остаточных лучей $\delta\tilde{Л}_{пк}$ в рассматриваемой лучевой сети s-го рода. Обозначим, наконец, через ω'' производную совокупность вида

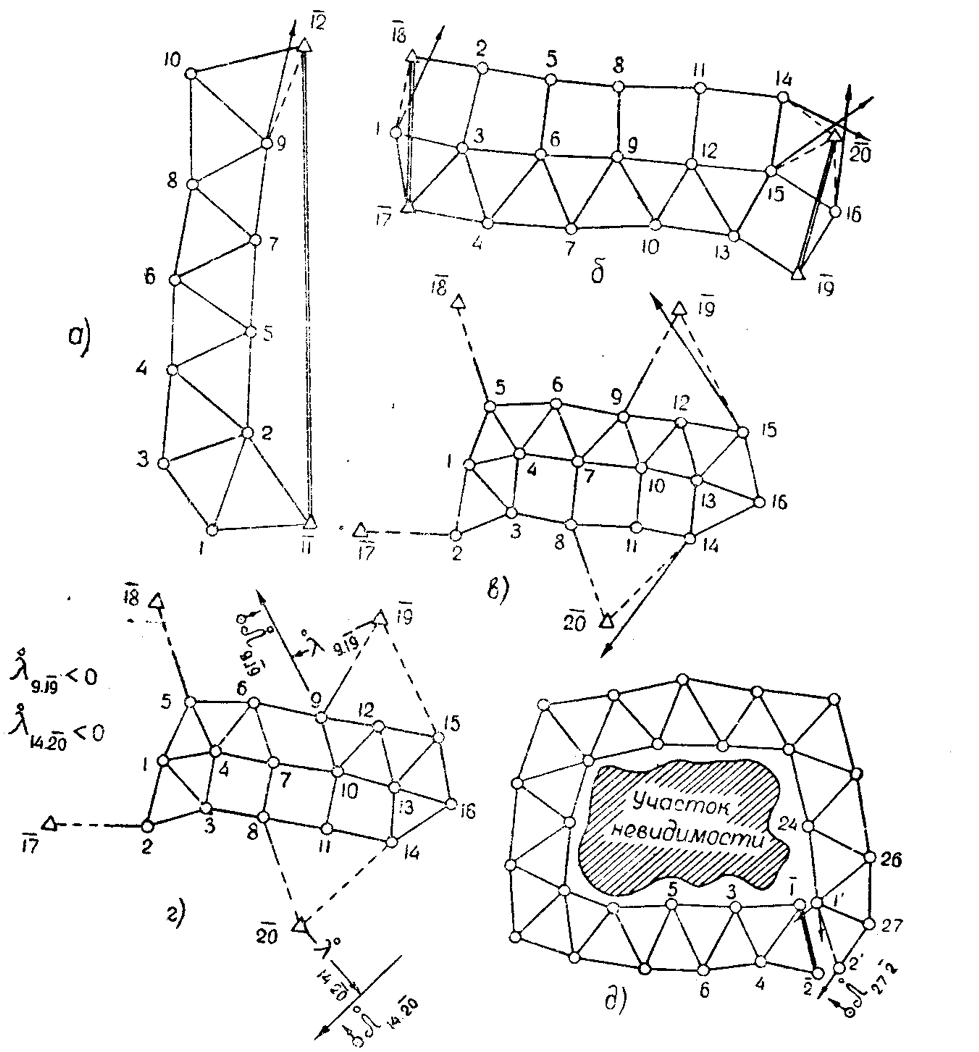

Рис. 5. Примеры невыполнения вершинных условий.

$$\omega'' = (\nu_1,\ \nu_2,\ldots\nu_s;\ \omega'), \tag{25}$$

где ν_1, $\nu_2,\ldots$, ν_s суть дополнительные данные нашей сети. Тогда вершинные условия этой сети выражаются требованием, чтобы после уравнивания сети все избыточные лучи $\delta Л_{пк}$, построенные по уравненному значению $\overline{\omega''}$ указанной выше подсовокупности ω'' расширенных данных, прошли бы совершенно точно через уравненные опорные положения $\dot{\overline{K}}$ соответствующих расщепленных вершин $\breve{K}$. Отсюда вытекает следующий общий вид **вершинных** условий лучевой сети:

$$\mathring{\overline{\lambda}}_{пк} = B_{пк}(\overline{\omega''}) = B_{пк}(\overline{\nu}_1,\ \overline{\nu}_2,\ldots,\overline{\nu}_s;\ \omega') = 0, \tag{26}$$

где $\overset{\circ}{\lambda}_{nк}$ есть направленное поперечное смещение относительно $\bar{K}$ связанного с $\dot{\bar{K}}$ уравненного избыточного луча $\delta \overset{\circ}{\bar{Л}}_{nк}$.

Мы видим, таким образом, что согласно (26) поперечное смещение $\overset{\circ}{\bar{\lambda}}_{nк}$ может быть представлено некоторой функцией $B_{nк}$ от соответствующей необходимой совокупности $\bar{\omega}''$ из уравненных значений $\bar{\nu}_g$, $\bar{\varsigma}_i$, $\bar{\chi}_\mu$ дополнительных и исходных расширенных данных лучевой сети. Отсюда вытекает, что функции $B_{nк}$ по своему строению родственны функциям $Д_{nк}$, выражающим поперечные смещения $\tilde{\bar{\lambda}}_{nк}$ уравненных остаточных лучей $\delta \tilde{\bar{Л}}_{nк}$ [см. (15)]. Поэтому развернутое представление вершинных условий может быть выполнено теми же двумя общими способами, которые были указаны в § 2 для дополнительных условий (15) или (15a). Степень же сложности вершинных соотношений (26) зависит от особенностей строения соответствующей лучевой сети. Этот вопрос мы рассмотрим более подробно в следующем параграфе.

Вследствие ошибочности исходных данных, наблюденных ς_i и твердых $\bar{\chi}_\mu$, поперечные смещения $\overset{\circ}{\lambda}_{nк}$ избыточных лучей $\delta \overset{\circ}{Л}_{nк}$, построенных по необходимой совокупности ω'' неуравненных расширенных данных, не будут удовлетворять строго условию (26). Поэтому вместо указанного равенства мы получим тогда

$$\overset{\circ}{\lambda}_{nк} = B_{nк}(\omega'') = B_{nк}(\nu_1,\ \nu_2,\ldots,\nu_s;\ \omega'') = w_{B_{nк}} \neq 0, \qquad (26a)$$

где ν_g — суть значения дополнительных данных, согласованные с некоторой необходимой совокупностью σ расширенных исходных данных [см. (16)], а $w_{B_{nк}}$ есть невязка рассматриваемого вершинного условия. Эти невязки показаны вместе с соответствующей лучевой сетью на рис. 5 в, а отдельно в действительную величину—на рис. 5 г, причем знак невязки $w_{B_{nк}} = \overset{\circ}{\lambda}_{nк}$ устанавливается по правилу (17). Из предыдущего следует, что каждая невязка вершинного условия $w_{B_{nк}}$ находится путем ее последовательного вычисления по цепи ячеек, связывающей источную пару вершин $\dot{A}$, $\dot{B}$ с соответствующей расщепленной вершиной $\breve{K}$.

В общем случае принятое положение $\dot{B}$ источной вершины B не совпадает с принятым положением $\dot{K}$ для расщепленной вершины K:

$$\dot{Б} \neq \dot{K},$$

и тогда мы будем говорить о **внешнем** вершинном условии. Такой случай как раз имеет место в разомкнутых цепях ячеек (см. рис. 3а, где $\dot{A} = \dot{9}$, $\dot{B} = \dot{10}$, а $\dot{K} \ni \dot{K}_1$, $\dot{K}_2$ будут соответственно $\dot{11}$ и $\dot{12}$).

Изредка, однако, возможны случаи, когда принятые положения $\dot{A}$, $\dot{B}$ источных вершин A, B совмещены с принятыми положениями $\dot{K}_1$, $\dot{K}_2$ расщепленных вершин $\breve{K}_1$, $\breve{K}_2$ сети:

$$\dot{A} = \dot{K}_1. \qquad \dot{B} = \dot{K}_2$$

(см. рис. 5 д, где $\dot{A} = \dot{K}_1 = \bar{1}$, а $\dot{B} = \dot{K}_2 = 2$). Встречаются иногда также лучевые сети с совмещенными источной $\dot{B}$ и конечной опорной $\dot{K}$ вершинами:

$$\dot{Б} = \dot{K}$$

(см. рис. 5 a, где $\dot{A} = \overline{11}$, $\dot{B} = \dot{K} = \overline{12}$). Возникающие во всех таких случаях вершинные условия мы будем называть **внутренними**.

§ 7. Взаимозаменяемость боковых и вершинных условий

В предыдущем параграфе указано, что каждая расщепленная вершина $\breve{K}$ вместе с соответствующим избыточным лучом $\mathring{Л}_{n_h к}$ дает одно вершинное условие. Отсюда следует, что если в данной лучевой сети имеется e пар $\breve{K}$, $\mathring{Л}_{n_h к}$ таких взаимосвязанных расщепленных вершин и избыточных лучей, то в этой сети возникает e вершинных условий.

С другой стороны, в § 5 было установлено, что каждая расщепленная сторона $\breve{Б}_{км}$ сети приводит к одному боковому условию. Значит, при a расщепленных сторонах $\breve{Б}_{км}$ в лучевой сети появится всего a боковых условий.

Допустим теперь, что в данной лучевой сети имеется a расщепленных сторон $\breve{Б}_{км}$ и e соответственных пар $\breve{K}$, $\mathring{Л}_{n_h к}$ расщепленных вершин и избыточных примычных лучей. Тогда в такой сети, кроме лучевых и дополнительных условий, возникнет еще только e каких-то независимых условий,—по числу e примычно-избыточных лучей $\mathring{Л}_{n_h к}$. Это вытекает совершенно очевидно из того соображения, что если мы уравняем все лучевые и дополнительные условия данной сети и одновременно добьемся прохождения уравненных избыточных лучей $♂\mathring{Л}_{n_h к}$ через соответствующие уравненные опорные положения $\dot{\bar{K}}$ расщепленных вершин $\breve{K}$, то сеть уравняется полностью.

Спрашивается, как примирить последнее утверждение о числе оставшихся независимых условий с тем обстоятельством, что в сети имеется a расщепленных сторон $\breve{Б}_{км}$ и e пар $\breve{K}$, $\mathring{Л}_{n_к к}$ расщепленных вершин и избыточных примычных лучей, причем каждое значение расщепленной величины дает одно условие.

Выход из возникшего таким образом противоречия содержится в двух легко доказываемых предложениях о взаимозаменяемости боковых и вершинных условий в поверхностных лучевых сетях.

П р е д л о ж е н и е п е р в о е (п р я м о е). Любое боковое условие лучевой сети, доставляемое некоторой расщепленной стороной $\breve{Б}_{км}$, всегда может быть выражено через одно или два вершинных условия, соответствующих принятому положению одного или обоих концов данной стороны $\breve{Б}_{км}$.

Примеры: а) боковое условие на рис. 3 $в$ для расщепленной стороны $\breve{Б}_{2.3}$ можно выразить через условие прохождения луча $♂ \mathring{Л}_{7.3}$ через опорное положение $\dot{3}$ расщепленной вершины $\breve{3}$;

б) боковое условие на рис. 3 *а* для расщепленной стороны $\breve{Б}_{\overline{12}.\overline{11}}$ можно выразить через условие прохождения лучей ♂$\mathring{Л}_{8.\overline{12}}$, ♂$\mathring{Л}_{8.\overline{11}}$, или ♂$\mathring{Л}_{8.\overline{12}}$, ♂$\mathring{Л}_{7.\overline{11}}$ через твердые вершины $\overline{11}$, $\overline{12}$.

П р е д л о ж е н и е в т о р о е (о б р а т н о е). Вершинное условие, доставляемое принятым положением одного из концов расщепленной стороны $\breve{Б}_{км}$, лучевой сети, всегда может быть выражено или через одно боковое условие для $\breve{Б}_{км}$, или же выражается этим боковым условием совместно с вершинным условием относительно принятого положения для второго конца стороны $\breve{Б}_{км}$.

П р и м е р ы: а) вершинное условие на рис. 3 *в*, соответствующее прохождению луча ♂$\mathring{Л}_{7.3}$ через опорное положение $\dot{3}$ расщепленной вершины $\breve{3}$, можно выразить через боковое условие для $\breve{Б}_{2.3}$;

б) вершинное условие на рис. 3. а, соответствующее прохождению луча ♂$\mathring{Л}_{7.\overline{11}}$ или ♂$\mathring{Л}_{8.\overline{11}}$ через твердую вершину $\overline{11}$, выражается совместно боковым условием для $\breve{Б}_{\overline{11}.\overline{12}}$ и условием прохождения луча ♂$\mathring{Л}_{8.\overline{12}}$ через твердую вершину $\overline{12}$.

Опираясь на высказанные здесь два почти очевидных предложения, мы приходим теперь к выводу, что никакого противоречия, отмеченного выше, в действительности не существует. Оказывается, все зависит от того, какие из условий данной лучевой сети: боковые или соответствующие вершинные, считать в качестве независимых.

Выбор *е* независимых условий, отвечающих *е* примычно-избыточным лучам ♂$\mathring{Л}_{n_h к}$, может быть выполнен несколькими способами при наличии в лучевой сети *а* расщепленных сторон $\breve{Б}_{км}$ и *е* соответственных пар $\breve{К}$, $\breve{Л}_{n_h к}$ расщепленных вершин и избыточных примычных лучей. Основными здесь будут являться нижеследующие три способа:

1) Считая *а* боковых условий зависимыми, примем в качестве независимых все *е* вершинных условий данной сети.

2) Считая зависимыми *а* вершинных условий, выражаемых через боковые и некоторые другие вершинные условия, примем в качестве независимых *а* боковых и $(e - a)$ оставшихся вершинных условий.

3) Считая зависимыми только *f* боковых условий из их общего числа *а*, примем в качестве независимых $(a - f)$ боковых условий и $[e - (a - f)]$ оставшихся вершинных условий, не связанных с выбранными *f* боковыми условиями.

Что касается выбора из этих трех способов наиболее подходящего для данной лучевой сети, то здесь решение определяется особенностями внутреннего строения рассматриваемой сети. Можно, однако, считать, что если в сети имеются только боковые условия и сеть состоит из одних треугольных ячеек, то следует придерживаться способа 2. Если же в сети, кроме боковых, возникают также вершинные и дополнительные условия и, особенно, если сеть образована смешанными ячейками, то к такой сети выгоднее применить способ 1.

§ 8. Степень сложности вершинных условий в различных поверхностных лучевых сетях

Выясним теперь степень сложности развернутого представления вершинных условий (26)

$$\overset{\circ}{\bar{\lambda}}_{пк} = B_{пк}(\bar{\omega}'') = B_{пк}(\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots, \bar{\nu}_s;\ \bar{\omega}') = 0$$

для различных поверхностных лучевых сетей. Как уже было отмечено выше, степень этой сложности зависит всецело от особенностей строения соответствующей лучевой сети.

Наиболее простой вид имеют вершинные условия $\overset{\circ}{\bar{\lambda}}_{пк} = 0$ для цепей треугольников рода $s = 0$ (рис. 3а, 5д). Для таких цепей в работах [3], [4] указаны быстрые приемы составления вершинных условий несколько отличного от (23) вида, а именно:

$$\overset{\circ}{\bar{u}}{}^1_к - \dot{\bar{u}}{}^1_к = 0 \qquad\qquad \overset{\circ}{\bar{u}}{}^2_к - \dot{\bar{u}}{}^2_к = 0. \tag{27}$$

Здесь $\overset{\circ}{\overline{u^1}}_к$, $\overset{\circ}{\overline{u^2}}_к$ суть поверхностные координаты построенного положения $\overset{\circ}{K}$ расщепленной вершины $\breve{K}$, которое получено по необходимым уравненным данным, исходя из некоторой пары $\dot{A}$, $\dot{B}$ источных вершин. Величины же $\dot{\bar{u}}_к{}^1$ и $\dot{\bar{u}}_к{}^2$ суть поверхностные координаты принятого уравненного положения $\dot{\bar{K}}$ той же расщепленной вершины $\breve{K}$.

Не особенно сложным будет также составление вершинного условия $\overset{\circ}{\bar{\lambda}}_{пк} = 0$ для цепи треугольников, проложенной между твердыми вершинами $\bar{A} = \dot{A}$ и $\bar{B} = \dot{B} = \dot{K}$ (изображена на рис. 5а, где $\dot{A} = \overline{11}$, $\dot{K} = \overline{12}$). Для цепи такого вида в книге [5] предлагается брать в качестве вершинного условия второе из равенств (27)

$$\overset{\circ}{\bar{u}}{}^2_к - \dot{\bar{u}}{}^2_к = 0,$$

но в условной отчетной опоре с осью $\uparrow U^1$ вдоль прямой $\dot{A}\dot{K}$ и осью $\uparrow U^2$ поперечно к $\dot{A}\dot{K}$.

Однако сложность развернутого представления вершинных условий $\overset{\circ}{\bar{\lambda}}_{кп} = 0$ резко возрастает, как только мы переходим от цепей треугольников к цепям смешанных ячеек (рис. 5б и 5в). Сказанное следует из того, что в сетях треугольников соседние соединительные цепи строятся независимо друг от друга, а в сетях смешанных ячеек каждая последующая соединительная цепь опирается, как правило, на все предшествующие соединительные цепи. Поэтому независимо от способа их составления вершинные условия в сетях смешанных ячеек будут содержать значительно большее количество угловых величин ς_i, чем в сетях треугольных ячеек. Отсюда вытекает громоздкость вершинных условий в лучевых сетях общего вида. Этот вывод косвенно следует также из сравнения частных выражений (а) и (б) на стр. 93 и 94.

§ 9. Сравнение дополнительных и вершинных условий в поверхностных лучевых сетях

Выше было указано, что по своему значению для лучевой сети дополнительные и вершинные условия резко различаются между собой.

Свод s дополнительных условий в поверхностной лучевой сети s-го рода отражает коренные особенности во внутреннем строении этой сети. Согласно [1] определитель указанного свода устанавливает степень неточности в построении сети по выбранной совокупности необходимых исходных данных, принятых за безошибочные. Поэтому дополнительные условия при $s>0$ образуются в лучевой сети даже в том случае, когда состав исходных данных является строго необходимым.

В противоположность сказанному вершинные условия возникают в поверхностной лучевой сети только при расширенном составе ее исходных данных, а именно—когда в сети появляются избыточные примычные лучи ♂$\overset{\circ}{Л}_{пк}$, связанные с соответствующими расщепленными вершинами $\breve{K}$. Поэтому при $s>0$ вершинные условия служат добавочным средством для оценки качества построения сети по заданным исходным данным. В случае же $s=0$ вершинные условия являются единственным средством такой оценки.

Несмотря на отмеченные довольно существенные внутренние различия оба эти вида сетевых условий внешне очень сходны между собой. Они выражают одно и то же требование: прохождение некоторого построенного примычного луча ♂$Л_{пк}$ через опорное положение $\dot{K}$ соответствующей расщепленной вершины $\breve{K}$. Отсюда следует, что при расширенном составе исходных данных в лучевой сети нет смысла как-то особо выделять остаточные лучи ♂$\tilde{Л}_{пк}$ от избыточных ♂$\overset{\circ}{Л}_{пк}$. Тем более, что такое разбиение в указанном случае не может быть выполнено однозначно даже при наличии в сети только одного остаточного и одного избыточного примычного луча (если не считаться с установленным в [1] достаточным условием построимости лучевой сети s-го рода). Поэтому в дальнейшем при расширенном составе исходных данных в лучевой сети мы будем обозначать принадлежащую ей совокупность остаточных ♂$\tilde{Л}_{пк}$ и избыточных примычных ♂$\overset{\circ}{Л}_{пк}$ лучей однообразно через ♂$\tilde{Л}_{пк}$. Сами же указанные лучи ♂$\tilde{Л}_{пк}$ назовем обобщенно о т м е т о ч н ы м и. Таким образом,

$$♂\tilde{Л}_{пк} \ni ♂\tilde{Л}_{пк},\ ♂\overset{\circ}{Л}_{пк}\,.$$

Заметим также, что совокупность данных ω'', по которой строятся остаточные лучи ♂$\tilde{Л}_{пк}$, составляет лишь часть совокупности данных ω'', задающей избыточные примычные лучи ♂$\overset{\circ}{Л}_{пк}$. Поэтому свод отметочных лучей ♂$\tilde{Л}_{пк}$ определяется полностью одной и той же общей совокупностью ω'' исходных данных ν_g, ς_i, $\overline{\chi}_\mu$. Это обстоятельство мы используем в дальнейшем при составлении свода смешанных конечно-разностных уравнений поправок, отвечающего в поверхностной лучевой сети исходному своду дополнительных и вершинных условий.

§ 10. Сравнительная оценка главных видов исходных условий и вытекающие отсюда выводы

Заканчивая статью, дадим итоговую сравнительную оценку рассмотренных выше четырех главных видов исходных условий в поверхностных лучевых сетях и на этой основе определим важнейшую задачу наших дальнейших исследований.

Прежде всего отметим, что свободные члены указанных условий являются величинами только двух родов—это или угол, или длина. Именно, углами являются свободные члены лучевых условий, длинами—свободные члены остальных трех условий. На этом основании лучевые условия могут быть названы также угловыми, а условия дополнительные, боковые и вершинные естественно объединить под общим названием длинновых.

Далее подчеркнем то существенное обстоятельство, что для составления лучевых условий вовсе не нужно знать действительного очертания уравниваемой лучевой сети, тогда как образование остальных трех условий невозможно без попутного построения этой сети в подлинных или уменьшенных размерах.

Наконец, обратим внимание на то, что лучевые условия связывают непосредственно сами угловые величины и потому имеют очень простой вид (18). В противоположность сказанному, остальные три условия, названные выше обобщенно длинновыми и представляемые равенствами (15), (19) и (26), имеют ту особенность, что каждое из них выражает какой-то отрезок $\overline{\tilde{\lambda}_{пк}}$, $\overline{\overset{\circ}{d}_{пк}}$ или $\overline{\overset{\circ}{\lambda}_{пк}}$ как функцию исходных и дополнительных уравненных данных сети. Поэтому длинновые условия, в противоположность лучевым, имеют всегда сложный вид, особенно—в сетях со смешанными ячейками.

Из проведенного здесь сравнения лучевых и длинновых условий вытекает, таким образом, что развернутое выражение условий последнего вида представляет довольно трудоемкую и в ряде случаев даже просто невыполнимую задачу. Между тем для всего дальнейшего нам, в конечном счете, нужны не сами исходные условия лучевой сети, а их конечно-разностное представление в виде плоскостных условных уравнений поправок. При этом свободные члены этих уравнений поправок, и в первую очередь,—длинновых, можно было бы вычислить, не прибегая даже к развертыванию исходных соотношений. Отсюда следует, что ввиду легкости составления угловых условий нашей дальнейшей задачей будет являться разыскание простых способов непосредственного получения длинновых условных уравнений поправок, минуя предшествующую трудоемкую ступень развертывания исходных длинновых условий. Эта задача будет решена в моей следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крутой Б. Ф. Поверхностные выравненные лучевые сети и общий способ их построения. Известия ТПИ, том 93, 1958.

2. Крутой Б. Ф. Общий вид соотношений связи при уравнивании поверхностных лучевых сетей и вытекающие отсюда задачи. Известия ТПИ, том 118, 1963.

3. Урмаев Н. А. Уравнивание полигонов в географических и прямоугольных координатах. Труды ЦНИИГАиК, вып. 1, Госкартогеодезия, Л., 1931.

4. Нуварьев В. С. Новый способ уравнивания триангуляций. ОГИЗ, Москва, Иркутск, 1932.

5. Келль Н. Г. и Баринов В. А. Высшая геодезия и геодезические работы. Часть II, Госуд. горное издательство, Л., М., Н., 1933.