ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 119 1963 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВОГО ЦЕНТРА В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

(Сообщение первое)

Н. Н. ВОДОПЬЯНОВА, Г. П. БОЙКОВ

(Представлено профессором, доктором Г. И. Фуксом)

Известно, что распространение тепла в твердых телах описывается системой дифференциальных уравнений теплопроводности. Большинство решений, встречающихся в литературе, получены для так называемых симметричных условий теплообмена, когда максимальная (минимальная) температура системы находится в геометрическом центре тела. Случаи, когда минимум и максимум температуры (тепловой центр) находится в любой точке тела или может перемещаться с течением времени, изучены пока недостаточно. Последнее связано с трудностями исследования как аналитического, так и экспериментального характера. На наш взгляд, эти трудности будут значительно уменьшены, если при исследовании той или иной задачи будет заранее каким-либо образом определен тепловой центр. С точки зрения математики тепловой центр замечателен тем, что первая производная от температурного поля здесь обращается в нуль, благодаря этому решение может быть представлено четной функцией. По сути дела, задача несимметричного нагрева (охлаждения) при известном тепловом центре может быть сведена к симметричной задаче, решение для которой значительно проще. Появляющиеся при этих обстоятельствах возможности удобно иллюстрировать примером стационарной теплопроводности в плоской стенке при равномерном внутреннем тепловыделении.

Пусть имеем плоскую стенку толщиною $2R$ с коэффициентом теплопроводности λ, внутреннее тепловыделение которой w. Стенка находится в условиях, когда с одной ее стороны температура среды $T_{\text{ср}1}$, коэффициент теплоотдачи α_1, а с другой соответственно $T_{\text{ср}2}$, α_2 (будем считать, что $T_{\text{ср}2} > T_{\text{ср}1}$; $\alpha_2 < \alpha_1$).

Процесс теплопроводности этой стенки описывается системой следующих уравнений:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda} w, \tag{1}$$

$$-\lambda \frac{dT(+R)}{dx} = \alpha_1 [T(+R) - T_{\text{ср}1}], \tag{2}$$

$$\lambda \frac{dT(-R)}{dx} = \alpha_2 [T(-R) - T_{\text{ср}2}]. \tag{3}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид:

$$T = -\frac{wx^2}{2\lambda} - \frac{\frac{wR}{\alpha_1} - \frac{wR}{\alpha_2} + T_{ср1} - T_{ср2}}{\frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2} + 2R} \cdot \left(x - R - \frac{\lambda}{\alpha_1}\right) + \frac{wR^2}{2\lambda} + \frac{wR}{\alpha_1} + T_{ср1}. \tag{4}$$

Используя это решение как точное, можно найти тепловой центр в теле из условия

$$\frac{dT(-b)}{dx} = 0, \tag{5}$$

откуда

$$L = 0{,}5\,\frac{\frac{1}{Bi_1} - \frac{1}{Bi_2} + \frac{1}{P_0}}{\frac{1}{Bi_1} + \frac{1}{Bi_2} + 2}, \tag{6}$$

где $L = \frac{b}{2R}$ — безразмерная координата теплового центра (начало координат расположено в средине пластины);

$Bi_1 = \frac{\alpha_1 R}{\lambda}$ — критерий Био со стороны более холодной среды;

$Bi_2 = \frac{\alpha_2 R}{\lambda}$ — критерий Био со стороны более горячей среды;

$P_0 = \frac{wR^2}{\lambda(T_{ср1} - T_{ср2})}$ — критерий Померанцева.

При известном тепловом центре рассматриваемая система может быть разбита на две отдельных системы, у которых в плоскости теплового центра имеет место идеальная изоляция. Решение для каждой системы представляется соответственно:

$$T_1(x) = T_{ср1} + \frac{w l_1^2}{2\lambda}\left[1 + \frac{2\lambda}{\alpha_1 l_1} - \left(\frac{x}{l_1}\right)^2\right]; \tag{7}$$

$$T_2(x) = T_{ср2} + \frac{w l_2^2}{2\lambda}\left[1 + \frac{2\lambda}{\alpha_2 l_2} - \left(\frac{x}{l_2}\right)^2\right]; \tag{8}$$

здесь $l_1 = R + b$; $l_2 = R - b$ (начало координат находится в плоскости идеальной изоляции).

На рис. 1 показано распределение температуры в плоской стенке, подсчитанное по выражению (4). Точно такой же результат получается, если использовать (7) и (8). При расчете было принято:

$$w = 1000\,\frac{ккал}{м^3\,час}; \quad \lambda = 0{,}1\,\frac{ккал}{м\,час\,град}; \quad T_{ср1} = 273^\circ\,К;$$

$$T_{ср2} = 373^\circ \text{ К}; \qquad \alpha_2 = 10 \frac{ккал}{м^2 \, час \, град};$$

$$\alpha_1 = 1000 \frac{ккал}{м^2 \, час \, град}; \qquad 2R = 0{,}2 \ м.$$

Исследования на основе теории подобия показывают, что безразмерный тепловой центр для большого числа явлений теплопроводно-

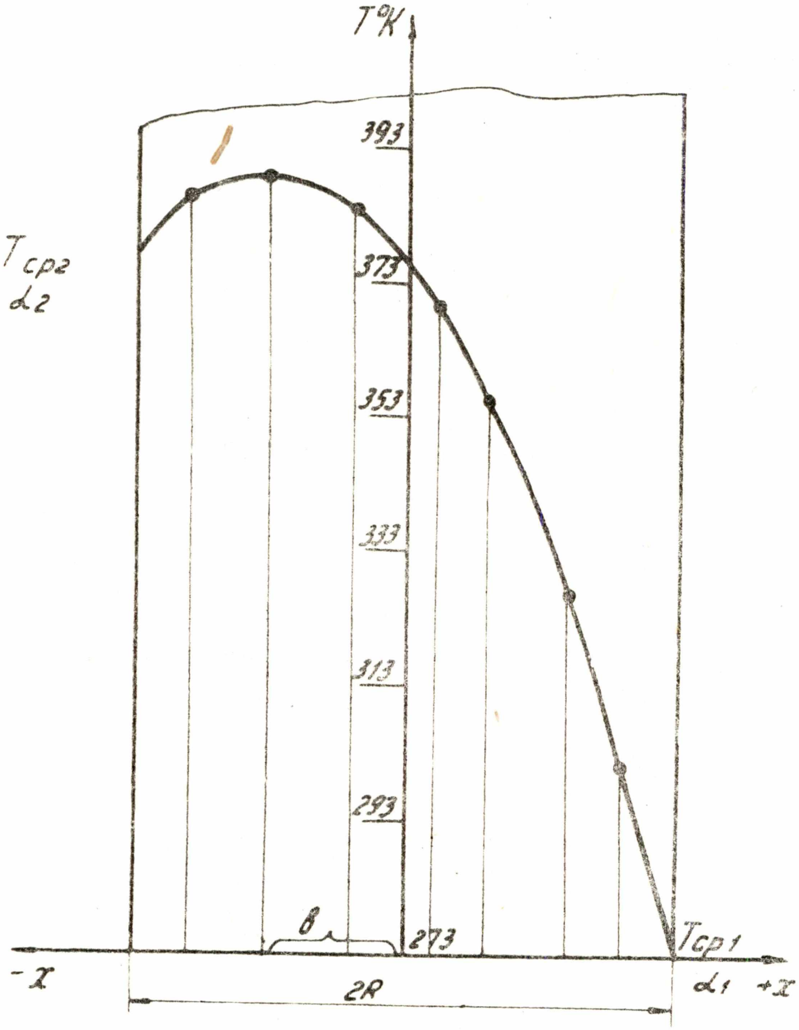

Рис. 1. Стационарная теплопроводность в пластине при внутреннем тепловыделении.

сти является функцией от критериев теплообмена (Bi или Ki) и критерия Po, который для различных случаев выражается через соответствующие величины. По количественному смыслу в данном случае он представляет отношение тепла, отдаваемого с поверхности при одинаковых усредненных граничных условиях, к количеству тепла, проводимого стационарной теплопроводностью через половину толщины пластины при перепаде температур, соответствующем разности температур первой и второй среды.

Действительно,

$$Po = \frac{w R^2}{\lambda (T_{\text{ср}1} - T_{\text{ср}2})} = \frac{wR}{\frac{\lambda}{R}(T_{\text{ср}1} - T_{\text{ср}2})} =$$

$$= \frac{\alpha^* (T_n^* - T^*_{\text{среды}})}{\frac{\lambda}{R}(T_{\text{ср}1} - T_{\text{ср}2})} = Bi^* \frac{T_n^* - T^*_{\text{среды}}}{T_{\text{ср}1} - T_{\text{ср}2}}. \qquad (9)$$

Здесь

$$\alpha^* = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

T_n^* — температура поверхности тела в случае осреднения граничных условий;

$$T^*_{\text{среды}} = \frac{T_{\text{среды}1} + T_{\text{среды}2}}{2};$$

$$Bi^* = \frac{\alpha^* R}{\lambda} = \frac{Bi_1 + Bi_2}{2}.$$

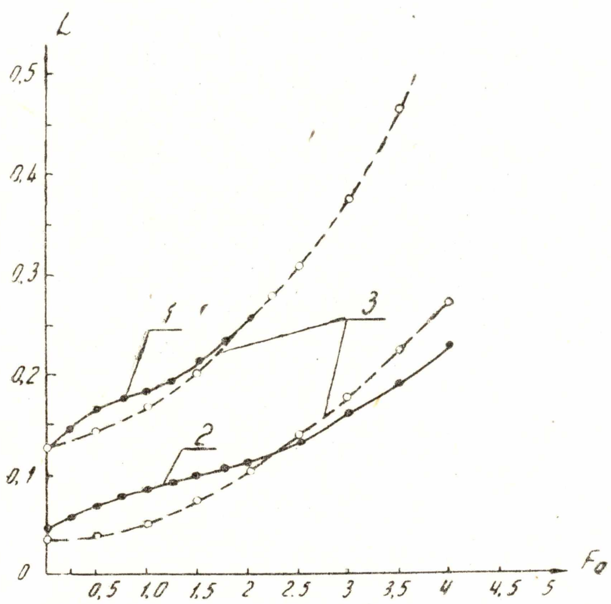

Рис. 2. Значения теплового центра при нестационарном охлаждении неограниченной пластины.

1 — расчетные данные согласно формуле (6) при $Bi_1 = 5$; $Bi_2 = 1{,}25$; $\lambda = 0{,}8 \frac{\textit{ккал}}{\textit{м час град}}$;

$a = 0{,}02 \frac{\textit{м}^2}{\textit{час}}$; $T_{\text{ср}1} = 273°$ К; $T_{\text{ср}2} = 473°$ К;

$T_0 = 873°$ К.

2 — то же при $Bi_1 = Bi_2 = 1{,}25$;

$\lambda = 0{,}8 \frac{\textit{ккал}}{\textit{м час град}}$; $a = 0{,}02 \frac{\textit{м}^2}{\textit{час}}$; $T_{\text{ср}1} = 273°$ К;

$T_{\text{ср}2} = 423°$ К; $T_0 = 773°$ К.

3. То же по методу Шмидта.

Для граничных условий третьего рода (нестационарный тепловой режим) в качестве критериев теплообмена остается критерий Bi, а критерий Po, согласно (9), принимает вид:

$$Po = Bi^{*} \frac{T_n^{*} - T^{*}_{\text{среды}}}{T_{\text{ср}1} - T_{\text{ср}2}} = \tag{10}$$

$$= Bi^{*} \frac{(T_0 - T^{*}_{\text{среды}}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 Fo}}{T_{\text{ср}1} - T_{\text{ср}2}},$$

где характеристические числа μ_n и коэффициенты A_n могут быть взяты в [1].

На рис. 2 показаны значения координат теплового центра „b“, подсчитанные на основании (6) с учетом (10). Здесь же (показано пунктиром) приведены результаты расчета, полученные методом конечных разностей Шмидта. Ряд других расчетов, выполненных для нестационарного теплообмена при граничных условиях третьего рода, дают аналогичную сходимость.

Таким образом, возникает предположение о том, что в ряде явлений теплопроводности может быть использована зависимость (6) с соответственным подсчетом критериев теплообмена (Bi или Ki) и выражением критерия Po согласно указанной интерпретации.

В случае нестационарного распространения тепла при известном тепловом центре система также может быть разбита на две отдельных системы, у которых в плоскости теплового центра имеет место идеальная изоляция. Однако в этом случае расположение плоскости теплового центра в теле зависит от времени, в связи с чем необходимо решать задачу с подвижной системой координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Лыков. Теория теплопроводности, ГИТТЛ, М.—Л., 1952.