ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ С. М. КИРОВА

Том 252 1975

ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ВИД ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИНЖЕНЕРНО-ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГОРНЫХ ПОРОД

Е. А. ПИСАРЕВ

(Представлена научным семинаром кафедры гидрогеологии и инженерной геологии)

Практическое значение изучения законов распределения в геологии можно иллюстрировать многочисленными примерами из практики разведочного дела, литолого-петрографических, геохимических и др. исследований (А. Б. Вистелиус, Д. А. Родионов, А. В. Канцель, С. И. Смирнов и др.). В инженерно-геологическом плане познание законов распределения показателей свойств горных пород приобретает также актуальнейшее значение, особенно в процессе определения расчетных показателей, построении систем инженерно-геологического опробования массива горных пород, при классифицировании пород и т. п. В связи с этим очень важно установить, какие факторы влияют на вид функции распределения показателей инженерно-геологических свойств пород. Именно рассмотрению этих факторов и посвящена настоящая статья. Мы не ошибемся, если назовем следующие.

I. Вид распределения, которому подчиняется то или иное свойство породы, зависит от схемы действия элементов эффективной неоднородности на данное свойство. Одновременно схемой действия эффективной неоднородности обусловлены также характер и степень влияния размера исследуемых образцов на параметры распределения изучаемого свойства. Это явление широко известно под названием масштабного эффекта. М. В. Рац показал [4], что для горных пород характерны следующие основные действия неоднородности, соответствующие им распределения свойств и масштабные эффекты.

1. Схема А—Н—Р (аддитивности—независимости—равноправности) — нормальный закон распределения показателей соответствующих свойств пород, который вытекает из следующих предположений. Положим, что образец породы состоит из n элементов эффективной неоднородности, причем каждый из этих элементов характеризуется величиной ξ_i данного свойства ($i=1, 2, \ldots, n$). Тогда свойство образца в целом есть не что иное, как $M\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, где $M\xi$ — математическое ожидание случайной величины ξ. Если действие элементов неоднородности на ξ_i аддитивно, независимо и равноправно и $n \to \infty$, то в силу выполнения условий центральной предельной теоремы, можно ожидать нормальное распределение данного свойства. По М. В. Рацу (1968) в этом случае следует ожидать масштабный эффект II рода, подчиняющийся правилу $\sqrt{n}$, и отсутствие масштабных эффектов I и III родов: среднее значение и асимметрия распределения свойства не зависит от размера проб.

2. Схема А—В—Р (аддитивности—взаимозависимости—равноправности). Распределение характеристик свойств логнормальное, масштабные эффекты II и III родов: коэффициент вариации меняется медленнее, чем по правилу $\sqrt{n}$; с ростом величины пробы уменьшается асимметрия. При неограниченном возрастании размера пробы схема А—В—Р приближается к схеме А—Н—Р.

3. Схема И—Н (избирательности—независимости); характерны: для признаков пород распределение Вейбулла, масштабный эффект I рода (уменьшение среднего значения с ростом величины пробы), а также масштабный эффект II рода, степень проявления которого зависит от интенсивности проявления масштабного эффекта I рода.

4. Неоднородность низшего порядка существенно усложняет картину распределения свойств горных пород и проявления масштабных эффектов, в частности, при увеличении области воздействия эксперимента дисперсия, уменьшаясь, стремится в этом случае к некоторой константе. Поэтому наряду с «чистыми» распределениями и масштабными эффектами, обусловленными эффективной неоднородностью пород, целесообразно говорить об обобщенных распределениях и масштабных эффектах, учитывающих влияния неоднородности низшего порядка.

II. Вид функции распределения того или иного инженерно-геологического показателя зависит, кроме того, от характера связей данного показателя с другими характеристиками пород. Покажем это на примере, причем здесь рассмотрим наиболее простую задачу, задачу о законе распределения случайной функции одного случайного аргумента.

Имеется непрерывная случайная величина ξ_1 с плотностью распределения $f(x)$. Другая случайная величина ξ_2 связана с ней зависимостью $\xi_2=\varphi(\xi_1)$. Требуется найти плотность распределения величины ξ_2. В математическом смысле данная задача решена в работе Е. С. Вентцель [2]. Например, нетрудно получить очень важный практический вывод, что линейная случайная функция от случайного аргумента, подчиненного нормальному закону, также подчинена нормальному закону.

III. Вид закона распределения частных показателей инженерно-геологических свойств горных пород зависит от характера изменчивости этих свойств в пространстве. Исследование данного вопроса мы покажем на примере изучения влияния пространственного тренда на вид соответствующего закона распределения характеристик какого-либо свойства горных пород x.

Положим, что некоторая выборка отобрана из массива пород в интервале глубин $[z_1, z_2]$. Плотность отбора образцов принимается постоянной. Кроме того, известно, что то или иное свойство пород выражается некоторой функцией глубины отбора $-a(z)$. Требуется исследовать для такого случая распределение инженерно-геологической характеристики пород x. Для данной фиксированной глубины отбора проб z зададим распределение показателя x в виде

$$fz(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp-\left\{\frac{[x-a(z)]^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad (1)$$

и, следовательно, вероятность того, что на фиксированной глубине z исследуемая характеристика породы изменяется в пределах от x до $x+dx$, будет

$$P_x^{(z)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp-\left\{\frac{[x-a(z)]^2}{2\sigma^2}\right\}dx.$$

Пусть, далее, вероятность того, что взятое наугад из выборки наблюдение было отобрано в интервале от z до $z+dz$, равна

$$P_z=\psi(z)\,dz.$$

Вероятность совместного осуществления событий («проба отобрана в интервале от z до $z+dz$» и «показатель, определенный по этой пробе, находится в пределах от x до $x+dx$») по теореме умножения вероятностей запишется как

$$P_x^{(z)} P_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp-\left\{\frac{[x-a(z)]^2}{2\sigma^2}\right\} \psi(z)\,dx\,dz.$$

Вычислим теперь вероятность того, что взятое наугад из выборки наблюдение имеет значение в пределах от x до $x+dx$. Пусть выборка состоит из N определений. Перенумеруем их в порядке отбора от 1 до N. Тогда искомая вероятность p_x равна вероятности того, что наблюдение имеет значение от x до $x+dx$ и при этом соответствует образцу либо с номером 1, либо с номером 2, ..., j, либо с номером N. Обозначая соответствующие вероятности через $p_1, p_2, \ldots, p_N$, по теореме сложения вероятностей найдем: $p_x = p_1+p_2+\ldots+p_N$. Считая, что N велико, и учитывая, что $p_i = p_x^{(zi)} \times p_{z_i}$, можно заменить суммирование интегрированием, что дает

$$p_x = dx \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp-\left\{\frac{[x-a(z)]^2}{2\sigma^2}\right\} \psi(z)\,dz.$$

Это означает, что плотность вероятности инженерно-геологического показателя x будет

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{z_1}^{z_2} \exp-\frac{[x-a(z)]^2}{2\sigma^2}\Big\} \psi(z)\,dz.$$

Теперь рассмотрим плотность $\psi(z)$. Пусть образцы пород после их отбора тщательно перемешаны, и требуется вычислить вероятность того, что извлеченный наугад образец имеет номер j. Эта вероятность равна $\frac{1}{N}$. По условию, плотность опробования горных пород задается постоянной. Это означает, что интервал отбора образца не зависит от его номера. Обозначим данный интервал через Δ_z, тогда весь интервал разреза, в пределах которого отобраны все образцы пород, представится как $z_2-z_1 = N\cdot\Delta_z$. Отсюда следует, что вероятность извлечения образца с номером j может быть представлена в виде

$$\frac{1}{N} = \frac{\Delta Z}{z_2-z_1}.$$

С другой стороны, если образец имеет номер j, то это означает, что он был отобран в пределах глубины от $z=(j-1)\Delta_z$ до $z+\Delta_z$. Считая, что интервал Δ_z мал, получим вероятность того, что взятый наугад образец был отобран в пределах от z до $z+dz$ как

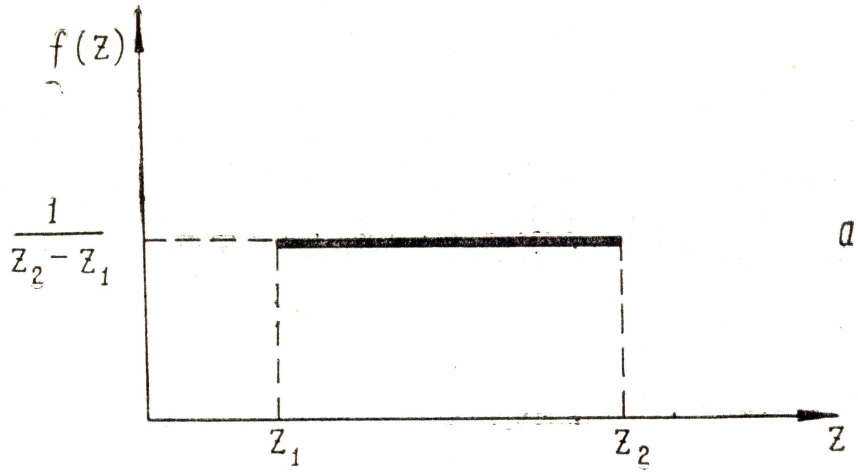
$$p_z = \frac{dz}{z_2-z_1},$$

и, следовательно, плотность вероятности случайной величины z — глубины отбора конкретного образца породы — равна

$$\psi(z) = \frac{1}{z_2-z_1}.$$

Это, как известно, равновероятное распределение (рис. 1, а). Таким образом, окончательно плотность вероятности x имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{z_2-z_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{z_1}^{z_2} \exp-\left\{\frac{[x-a(z)]^2}{2\sigma^2}\right\} dz. \qquad (1,\ а)$$



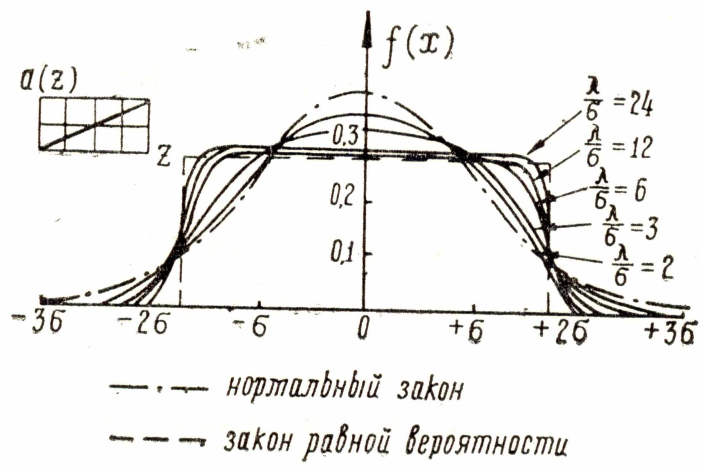


Рис. 1. а) кривая равновероятного распределения; б) семейство теоретических кривых распределения при линейном смещении по пространственной координате; z центра группирования показателей инженерно-геологических свойств пород.

Заметим также, что если при фиксированной z плотность вероятности x задана как $f_z(x)$, то при постоянстве плотности опробования будет иметь место следующая формула:

$$f(x) = \frac{1}{z_2 - z_1} \int\limits_{z_1}^{z_2} f_z(x) \cdot dz, \qquad (2)$$

где $f_z(x)$ назовем фиксированным распределением, а распределение $f(x)$ — распределением в выборке.

Вычислим теперь Mx, используя для этого следующую формулу

$$Mx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{z_2 - z_1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \int\limits_{z_1}^{z_2} f_z(x)\, dz dx.$$

или, меняя порядок интегрирования,

$$Mx = \frac{1}{z_2 - z_1} \int\limits_{z_1}^{z_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_z(x)\, dx\, dz.$$

Обозначим

$$M_{x_z} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x fz(x)\, dx.$$

Поскольку $fz(x)$ — плотность вероятности x на фиксированной глубине z, то M_{x_z} является математическим ожиданием случайной величины x в предположении, что z фиксировано. В частности, для распределения $fz(x)$, заданного как (1), имеем $M_{x_z} = a(z)$. Математическое ожидание для распределения в выборке представится теперь в виде

$$Mx = \frac{1}{z_2 - z_1} \int\limits_{z_1}^{z_2} Mx_z\, dz.$$

или

$$Mx = \frac{1}{z_2 - z_1} \int\limits_{z_1}^{z_2} a(z)\, dz. \qquad (3)$$

Для вычисления дисперсии σ_x^2 воспользуемся формулой

$$\sigma_x^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - M^2 x.$$

Поскольку распределение x в выборке задается плотностью (1), то

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{z_2 - z_1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \int\limits_{z_1}^{z_2} fz(x)\, dz dx - M^2 x.$$

Меняя порядок интегрирования, приходим к выражению

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{z_2 - z_1} \int\limits_{z_1}^{z_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_z(x)\, dz dx - M^2 x.$$

При заданном z дисперсия случайной величины x в фиксированном распределении может быть записана как

$$\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_z(x)\, dx - M^2 x_z.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_z(x)\, dx = \sigma^2 + M^2 x_z,$$

и

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{z_2 - z_1} \int\limits_{z_1}^{z_2} \sigma^2 dz + \frac{1}{z_2 - z_1} \int\limits_{z_1}^{z_2} M^2 x_z\, dz - M^2 x.$$

Окончательно имеем

$$\sigma_x^2 = \sigma^2 + \frac{1}{z_2 - z_1} \int\limits_{z_1}^{z_2} a^2(z)\, dz - \left[\frac{1}{z_2 - z_1} \int\limits_{z_1}^{z_2} a(z)\, dz \right]^2. \qquad (4)$$

Таким образом, математическое ожидание Mx в выборке представляет собой усредненное математическое ожидание Mx_z фиксированного распределения, а дисперсия в выборке больше дисперсии σ^2 фиксированного распределения на величину

$$\sigma_x^2-\sigma^2=\frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2}a^2(z)dz-\left[\frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2}a(z)dz\right]^2,$$

Рассмотрим простейший случай, когда $a(z)$ представляет собой линейную функцию глубины

$$a(z)=\beta z.$$

Согласно (1, а), получим

$$f(z)=\frac{1}{z_2-z_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{z_1}^{z_2}\exp-\left[\frac{(x-\beta z)^2}{2\sigma^2}\right]dz,$$

После выполнения преобразования

$$\exp-\left[\frac{(x-\beta z)^2}{2\sigma^2}\right]=\exp-\left[\frac{(z-x/\beta)^2}{2\sigma^2\beta^2}\right]$$

представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=\frac{1}{\beta(z_2-z_1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/\beta}\int_{z_1}^{z_2}\exp-\left[\frac{(z-x\beta)^2}{2\sigma^2\beta^2}\right]dz,$$

после чего будем иметь

$$f(x)=\frac{1}{\beta(z_2-z_1)}\left[\Phi\left(\frac{z_2-x/\beta}{\sigma/\beta}\right)-\Phi\left(\frac{z_1-x/\beta}{\sigma/\beta}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\beta z_2-\beta z_1}\left[\Phi\left(\frac{\beta z_2-x}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\beta z_1-x}{\sigma}\right)\right].$$

Для упрощения равенства положим $\beta z_1=-\lambda_1$, $\beta z_2=\lambda_2$, тогда

$$f(x)=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\left[\Phi\left(\frac{\lambda_1+x}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x-\lambda_2}{\sigma}\right)\right]. \tag{5}$$

Вычислим теперь функцию распределения, отвечающую (5)

$$F(x)=p(x\leqslant\xi)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=$$

$$=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\int_{-\infty}^{x}\left[\Phi\left(\frac{\lambda_1+x}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x-\lambda_2}{\sigma}\right)\right]dx. \tag{6}$$

В полученное выражение входит интеграл от функции Лапласа. Из правила интегрирования по частям следует равенство

$$\int_{-\infty}^{t}\Phi(t)dt=t\Phi(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \tag{7}$$

Применяя формулу (7) к правой части равенства (6), имеем:

$$F(x)=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\left[(x+\lambda_1)\Phi\left(\frac{\gamma_1+x}{\sigma}\right)+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x+\lambda_1)^2}{2\sigma^2}\right\}\right]-$$

$$-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\left[(x-\lambda_2)\Phi\left(\frac{(x+\lambda)^2}{\sigma}\right)+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\lambda_2)^2}{2\sigma^2}\right\}\right].$$

Для простоты положим $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, тогда

$$F(x) = \frac{1}{2\lambda}\left[(x+\lambda)\,\Phi\left(\frac{x+\lambda}{\sigma}\right) - (x-\lambda)\,\Phi\left(\frac{x-\lambda}{\sigma}\right)\right] -$$

$$- \frac{\sigma}{2\lambda\sqrt{\pi}}\left[\exp\left\{-\frac{(x+\lambda_2)}{2\sigma^2}\right\} - \exp\left\{\frac{(x+\lambda)^2}{2\sigma^2}\right\}\right]. \qquad (8)$$

Соответствующее семейство теоретических кривых распределения приводится на рис. 1, б. Все кривые этого семейства симметричны (показатель асимметрии $A=0$) и плосковершинны (показатель эксцесса $E<0$). При больших значениях отношения λ/σ кривые приближаются к кривой закона равной вероятности (равномерного распределения в пределах $\pm\lambda$). Последняя кривая, являющаяся для данного семейства предельной (при $\sigma\to 0$) показана на рис. 1, б штриховым пунктиром. Другой предельной кривой семейства (при $\lambda\to 0$) является кривая нормального распределения.

Вычислим теперь для распределения (5) математическое ожидание Mx и дисперсию σ_x^2 исследуемого показателя свойства пород. Согласно (3)

$$Mx = \frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2} a(z)\,dz = \frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2} \beta z\,dz = \frac{1}{2}\beta(z_2+z_1).$$

Так как мы уже приняли, что $\beta z_1 = -\lambda$ и $\beta z_2 = \lambda$, то $Mx=0$. Для вычисления $\sigma^2 x$ воспользуемся формулой (4)

$$\sigma_x^2 = \sigma^2 + \frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2} \beta^2 z^2\,dz - \left[\frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2}\beta z\,dz\right]^2 =$$

$$= \sigma^2 + \frac{\beta^2}{z_2-z_1}\left(\frac{1}{3}\,z_2^3 - \frac{1}{3}\,z_1^3\right) = \sigma^2 + \frac{\lambda_2}{3},$$

или

$$\sigma x = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\lambda^2}{3}},$$

Изложенный выше подход может быть применен для исследования законов распределения частных показателей инженерно-геологических свойств пород и в более сложных случаях, например, когда имеет место нелинейный тренд. При этом, очевидно, общность всех рассуждений не теряется. Разобранное же здесь решение частной задачи показало, что один из возможных случаев отклонения закона распределения показателей инженерно-геологических свойств пород от нормального связан с наличием закономерной линейной пространственной изменчивости.

IV. Вид закона распределения частных показателей зависит от способа размещения точек опробования в массиве горных пород. Например, в геохимии, геолого-разведочном деле по этому поводу уже есть некоторые теоретические соображения [1, 3]. Влияние геометрических особенностей сети опробования на вид закона распределения инженерно-геологических характеристик пород показано на многочисленных примерах в работе Е. Н. Коломенского (1969), однако в целом этот вопрос остается пока не исследованным достаточно полно, несмотря на то, что он заслуживает особого внимания, так как только на основе его изучения можно регулировать, в целях повышения надежности результатов, сам процесс инженерно-геологических исследований без каких-либо дополнительных затрат средств.

V. Вид закона распределения зависит от условий и точности проведения исследований того или иного инженерно-геологического свойства породы. Актуальность изучения данного вопроса очевидна и вряд ли вызовет у кого-либо возражения. Однако приходится констатировать, что в настоящее время применительно к инженерно-геологическим свойствам горных пород сформулированное положение фактически остается еще не изученным, и поэтому сказать что-либо определенное в данном отношении, даже в постановочном плане, не представляется здесь возможным.

Таким образом, выше были с достаточной детальностью разобраны все те основные факторы, которыми совместно или по отдельности определяется тот или иной вид закона распределения частных показателей инженерно-геологических свойств горных пород, которые следует учитывать при построении стохастических моделей геологических процессов и при обработке результатов наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Белов. О геохимическом смысле законов распределения концентраций вещества. — В сб.: Математические методы геохимических исследований. М., 1966.
2. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., 1964.
3. А. М. Марголин. Влияние характера неравномерности сети разведочных точек на надежность результатов разведки залежей нефти. Труды ВНИИ, вып. X, VII, 1966.
4. М. В. Рац. Неоднородность горных пород и их физических свойств. М., 1968.