ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 119 1963 г.

К ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И МАССЫ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ЦИЛИНДРЕ

С. П. КУЗНЕЦОВ

В основе исследования явлений перемещения тепла и влаги во влажных материалах лежит система дифференциальных уравнений тепло- и массообмена, впервые предложенная А. В. Лыковым [1].

Рассмотрим однородное изотропное влажное тело, внутри которого имеет место как градиент температуры, так и градиент влажности. В этом случае поток влаги $q_в$ равен:

$$q_в = -k\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial n} - k\gamma_0 \delta \frac{\partial t}{\partial n}, \tag{1}$$

где u — влажность материала, $кг/кг$ сухого вещества;

k — коэффициент влагопроводности, $\frac{м^2}{час}$;

δ — коэффициент термовлагопроводности, $\frac{1}{град}$;

γ_0 — плотность абсолютно сухого тела, $\frac{кг}{м^3}$;

n — нормаль к поверхности.

Если в рассматриваемом теле выделить некоторый объем v, ограниченный гладкой поверхностью s, то приращение влаги в нем будет происходить за счет притока влаги извне, вследствие термо- и влагопроводности. Количество влаги, втекающей через поверхность s в единицу времени, обозначим через Q_1. Если считать, что перемещение влаги происходит только в направлении оси ox, то, воспользовавшись формулой Остроградского, можно написать

$$Q_1 = \iiint\limits_{(v)} k\gamma_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right) dv. \tag{2}$$

Допуская, что в момент времени τ в рассматриваемом объеме содержится влаги

$$\iiint\limits_{(v)} \gamma_0 u(\tau) dv$$

и отнесенное к единице времени приращение влаги

$$Q_2 = \iiint\limits_{(v)} \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau}\, dv, \tag{3}$$

то будет иметь место равенство:

$$\iiint\limits_{(v)} k\gamma_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right) dv = \iiint\limits_{(v)} \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau}\, dv.$$

После незначительных преобразований, при условии постоянства теплофизических коэффициентов (k, δ), получим основное дифференциальное уравнение влагопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\delta \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Во влажном теле тепло перемещается не только под действием перепада температур, но и переносится мигрирующей влагой, вследствие этого гипотеза Фурье принимает вид

$$q = -(\lambda + \gamma_0 k\delta I) \frac{\partial t}{\partial n} - k\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial n}. \tag{5}$$

Обозначая количество тепла, проходящего в единицу времени через поверхность тела вдоль оси ox через $Q_{\rm I}$, на основании формулы Остроградского можно написать

$$Q_{\rm I} = \iiint\limits_{(v)} \left[(\lambda + k\gamma_0\delta I) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + k\gamma_0 I \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] dv,$$

считая энтальпию I за величину постоянную, так как изменение ее в рассматриваемом теле весьма мало. При наличии внутри тела испарения необходимо учесть количество тепла, поглощаемое внутренними отрицательными источниками, определяемое формулой

$$Q_{\rm II} = \iiint\limits_{(v)} r\gamma_0 \frac{\partial u'}{\partial \tau}\, dv, \tag{6}$$

где $\dfrac{\partial u'}{\partial \tau}$ — количество испарившейся влаги, приходящейся на единицу плотности сухого вещества в единицу времени;

r — теплота испарения, $\dfrac{ккал}{кг}$.

Если в момент времени τ в выделенном объеме содержалось количество тепла

$$Q_{\rm III} = \iiint\limits_{(v)} (c_0 + c_{\rm в} u)\gamma_0 t\, dv, \tag{7}$$

где c_0 и $c_{\rm в}$ — соответственно удельная теплоемкость абсолютно сухого вещества и влаги, $\dfrac{ккал}{кг\ град}$ ($c_{\rm в} \approx 1$), то изменение теплосодержания внутри объема v в единицу времени равно

$$Q_{IV} = \iiint\limits_{(v)} \left[(c_0 + c_в u)\gamma_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} + c_в t \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} \right] dv. \tag{8}$$

Заметим, что энтальпия I перемещающейся влаги $\left(\frac{ккал}{кг}\right)$ в основном приходится на влагу в жидком состоянии, так как масса мигрирующего пара мала по сравнению с массой перемещающейся жидкости, поэтому можно считать, что $c_в t \approx I$.

Составляя тепловой баланс в рассматриваемом объеме v и учитывая дифференциальное уравнение влагопроводности (4), получим

$$\bar{c}\gamma_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + r\gamma_0 \frac{\partial u'}{\partial \tau}, \tag{9}$$

где $\bar{c} = c_0 + c_в u$.

Если испарения или конденсации влаги внутри тела не происходит, то полученное дифференциальное уравнение превращается в обычное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \text{ где } a = \frac{\lambda}{c\gamma_0}.$$

В теории сушки доказывается, что с некоторым приближением можно принять прямую пропорциональность между скоростью испарения и скоростью изменения влажности $\frac{\partial u}{\partial \tau}$

$$\frac{\partial u'}{\partial \tau} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tau},$$

и тогда дифференциальное уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon r}{\bar{c}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau}, \tag{10}$$

где a — коэффициент температуропроводности, $\frac{м^2}{час}$, ε — критерий внутреннего испарения.

Таким образом, исследования процессов нагревания и охлаждения влажных тел связано с решением системы (4), (10) дифференциальных уравнений тепло- и влагообмена при соответствующих начальных и граничных условиях.

Рассмотрим решение этой системы для неограниченного цилиндра в случае неизменного содержания влаги и при условии, что она перемещается в виде жидкости.

Задача математически формулируется уравнениями:

$$\frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right), \tag{11}$$

$$\frac{\partial u(r, \tau)}{\partial \tau} = k \left(\frac{\partial^2 u(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial r} \right) + k\delta \left(\frac{\partial^2 t(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right);$$

при начальных и граничных условиях:

$$t(r, o) = t_0 = \text{const},$$
$$u(r, o) = u_0 = \text{const}; \tag{12}$$

$$\frac{\partial t(o, \tau)}{\partial r} = \frac{\partial u(o, \tau)}{\partial r} = 0,$$
$$t(R, \tau) = 0, \tag{13}$$
$$u_0 = \frac{2}{R^2}\int\limits_o^R u(r, \tau) r\, dr.$$

Применяя преобразования Лапласа

$$L[t(r, \tau)] = \int\limits_o^R e^{-s_0\tau} t(r, \tau) d\tau = T(r, s)$$

к первому уравнению системы (11), получим общее решение уравнения изображений для температуры

$$T(r, s) = AI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, r\right) + BK_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, r\right) + \frac{t_0}{s}, \tag{14}$$

где $I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, r\right) = J_0\left(i\sqrt{\frac{s}{a}}\, r\right)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, первого рода; $K_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, r\right) = -$

$$-I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, r\right)\left(\ln\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{a}}\, r + c\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{a}}\, r\right)^2 +$$

$$+\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{a}}\, r\right)^4}{(2!)^2} + \ldots -$$

модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, второго рода, $C = 0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера, A и B — коэффициенты, не зависимые от r, но зависящие от s.

Из условия симметрии следует, что $B = 0$. Коэффициент A определяем из граничного условия для изображений $T(R, s) = 0$, получаем

$$A = -\frac{t_0}{sI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, R\right)}.$$

Изображение для температуры принимает вид

$$T(r, s) = \frac{t_0}{s} - \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, r\right)}{sI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, R\right)}. \tag{15}$$

Для перехода от изображения к оригиналу $t(r,\tau)$ воспользуемся интегральным соотношением

$$t(r,\tau)-t_0=-\frac{t_0}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{s\tau}I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,r\right)}{sI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\right)}\,ds.$$

Подынтегральная функция имеет простые полюсы, один из которых находится в начале координат $s=0$, а остальные $s_n=-\mu_n^2\frac{a}{R^2}$ располагаются на отрицательном направлении вещественной оси.

Переходя к контурному интегралу и используя теорему о вычетах, получим

$$\frac{t(r,\tau)}{t_0}=-\left\{\text{выч}\left[\frac{e^{s\tau}I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,r\right)}{sI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\right)}\right]_0+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\text{выч}\left[\frac{e^{s\tau}I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,r\right)}{sI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\right)}\right]_{s_n}\right\}.$$

Вычет относительно полюса $s=0$ равен единице. Сумма вычетов относительно остальных полюсов равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{\mu_nJ_1(\mu_n)}\cdot e^{-\mu_n^2\frac{a\tau}{R^2}},$$

так как

$$I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\right)=i^{-1}J_1\left(i\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\right),\quad \mu_n=i\sqrt{\frac{s_n}{a}}\,R.$$

Таким образом, относительная температура в любой точке неограниченного цилиндра в любой момент времени определяется равенством

$$\Theta(r,\tau)=\frac{t_0-t(r,\tau)}{t_0}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{\mu_nJ_1(\mu_n)}\cdot e^{-\mu_n^2\frac{a\tau}{R^2}}. \tag{16}$$

Для определения функции распределения влажности в неограниченном цилиндре применим преобразование Лапласа к уравнению второму системы (11).

Обозначая $L[u(r,\tau)]=\int\limits_0^{\infty}e^{-s\tau}u(r,\tau)d\tau=F(r,s)$ и пользуясь соотношениями

$$T(r,s)=-\frac{t_0}{sI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\right)}\cdot I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,r\right)+\frac{t_0}{s},$$

$$ZI'_n(Z) - nI_n(Z) = ZI_{n-1}(Z),$$

получим

$$F''(r, s) + \frac{1}{r} F'(r, s) - \frac{s}{k} F(r, s) + \frac{u_0}{k} -$$

$$- \frac{t_0 \delta\left(\frac{s}{a}\right) I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, r\right)}{s I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, R\right)} = 0. \tag{17}$$

Применяя к последнему равенству преобразование Лапласа

$$L[F(r, s)] = Q(\lambda, s),$$

после некоторых преобразований получим

$$Q(\lambda, s) = \frac{u_0}{\lambda s} + \frac{t_0 \delta}{a I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, R\right)\left(\frac{s}{a} - \frac{s}{k}\right)\left(\lambda^2 - \frac{s}{a}\right)^{1/2}} +$$

$$+ \frac{c}{\left(\lambda^2 - \frac{s}{k}\right)^{1/2}}, \tag{18}$$

где c — произвольная постоянная.

Посредством обратного преобразования Лапласа от равенства (18) перейдем к изображению функции распределения влажности

$$F(r, s) - \frac{u_0}{s} = \frac{k t_0 \delta}{(k - a)} \cdot$$

$$\cdot \frac{I_1\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\, R\right) \cdot I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, r\right) - \sqrt{\frac{a}{k}}\, I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, R\right) \cdot I_0\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\, r\right)}{s I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, R\right) \cdot I_1\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\, R\right)}. \tag{19}$$

Произвольная постоянная c определяется посредством граничного условия (13) с учетом соотношения

$$\int_0^R x I_0(ax)\, dx = \frac{R}{a} I_1(aR).$$

Для перехода от изображения (19) к оригиналу $u(r, s)$ введем обозначения:

$$\Phi(s) = I_1\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\, R\right) \cdot I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, r\right) -$$

$$- \sqrt{\frac{a}{k}}\, I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, R\right) \cdot I_0\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\, r\right),$$

$$\Psi(s) = sI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}R\right)\cdot I_1\left(\sqrt{\frac{s}{k}}R\right).$$

Корнями полинома $\Psi(s)$ будут:

1. $s = 0$;
2. $s_n = -\frac{\mu_n^2 a}{R^2}$, где $\mu_n = i\sqrt{\frac{s}{a}}R$;
3. $s_m = -\frac{\mu_m k}{R^2}$, где $\mu_m = i\sqrt{\frac{s}{k}}R$,

которые при

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$m = 1, 2, 3, \ldots$$

располагаются на отрицательном направлении вещественной оси.

Применяя теорему разложения к изображению (19), получим функцию относительного распределения влажности в неограниченном цилиндре при рассматриваемых начальных и граничных условиях

$$V(r,\tau) = \frac{u(r,\tau) - u_0}{u_0} =$$

$$= \frac{t_0\delta k}{u_0(k-a)}\left[2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{a}{k}}J_1(\mu_n)J_0\left(\sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n\frac{r}{R}\right) - J_1\left(\sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n\right)\cdot J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)\cdot J_1\left(\sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n\right)}\cdot e^{-\mu_n^2\frac{a\tau}{R^2}} - \right.$$

$$\left. -2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{a}{k}}J_1\left(\sqrt{\frac{k}{a}}\mu_m\right)\cdot J_0\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)}{\mu_m J_0\left(\sqrt{\frac{k}{a}}\mu_m\right)\cdot J_1(\mu_m)}\cdot e^{-\mu_m^2\frac{k\tau}{R^2}}\right]. \tag{20}$$

Полученные результаты (16) и (20) являются дальнейшим развитием аналитической теории теплопроводности влажных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности, изд. 1952.
2. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Теория функций комплексного переменного, изд. 1951.